3.5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON. PROBLEMAS DE DINÁMICA

En el estudio del movimiento de una partícula, es decir de un cuerpo (o conjunto de cuerpos) idealizable como un punto material, es de fundamental importancia la consideración de algunos aspectos que vamos a señalar.

Definir el sistema mecánico. **Diagrama de fuerzas**

Definir, o, como se dice a veces, aislar el sistema mecánico, es determinar con claridad cuál es el cuerpo (o conjunto de cuerpos) cuyo movimiento va a estudiarse. Consiste en precisar cuáles porciones de materia, qué objetos, forman parte del sistema elegido, es decir, son su interior, y cuáles no son del sistema, es decir, son externos a él.

Definir el sistema implica precisar con cuáles cuerpos externos tiene interacciones relevantes el sistema objeto de estudio. Con frecuencia una línea punteada trazada en un dibujo, rodeando el sistema o cuerpo elegido, ayuda a determinar con cuáles cuerpos externos hay interacciones. **Todas** las interacciones externas relevantes se representan como **fuerzas hechas sobre** el cuerpo elegido o sistema mecánico, en el **diagrama de fuerzas**, que debe hacerse siempre en una posición o situación general del movimiento del cuerpo.

Definir el sistema mecánico es pues determinar con exactitud cuál cuerpo, cuál trozo de materia, va a estudiarse, para poder decir con precisión cuáles son todas las fuerzas externas que actúan sobre él y determinan su movimiento.

La elección clara y explícita de un cuerpo o sistema mecánico y la consecuente realización de su diagrama de fuerzas, son cuestiones cruciales de la mecánica. A medida que se progrese en su estudio, los cuerpos o sistemas mecánicos posibles serán más variados, más sutiles, más complejos. Por ahora, para que un sistema mecánico elegido pueda ser tratado como una sola partícula o punto material, se requiere que sus movimientos internos no sean relevantes.

Marco inercial de referencia. **Ejes**

Hay que definir con claridad cuál es el cuerpo rígido (o conjunto de cuerpos rígidamente unidos entre sí) que va a servir de marco de referencia. Para poder aplicar la segunda ley de Newton dicho marco de referencia debe ser inercial. Con frecuencia, para el estudio de movimientos de cuerpos en un laboratorio o, en general, cerca de la superficie terrestre, se elige como marco de referencia el propio laboratorio o edificio, es decir, un marco localmente unido a la superficie terrestre, marco que puede considerarse muy aproximadamente inercial, despreciando los pequeños efectos de rotación de la tierra, que para muchísimos movimientos locales no son importantes.

Elegido el marco inercial de referencia es necesario determinar un sistema de coordenadas adecuado. En un comienzo usaremos unas coordenadas cartesianas, lo que conlleva entonces la elección de un origen fijo y unos ejes x, y, igualmente fijos en el marco inercial elegido.

Más adelante, en el movimiento circular, estudiaremos las coordenadas intrínsecas con sus direcciones tangencial y normal.

Con frecuencia el movimiento de un cuerpo se realiza de una manera determinada y específica, debido a restricciones, ligaduras o vínculos especiales, que lo obligan a moverse de tal o cual manera. Por ejemplo, un plano inclinado obliga a moverse un cuerpo en una trayectoria rectilínea. Sobre una pista circular un cuerpo se mueve forzosamente en círculo. Otro cuerpo se encuentra simplemente en reposo, o bien, dos bloques unidos por una cuerda inextensible tienen movimientos ligados uno al otro. La elección de ejes adecuados está muy relacionada con esas condiciones específicas de cada movimiento concreto y es importante plasmar matemáticamente con claridad dichas condiciones específicas, que son de tipo cinemático, antes de la aplicación de la segunda ley de Newton.

Plantear la Segunda Ley de Newton

Elegido el cuerpo o sistema mecánico, hecho el diagrama de fuerzas, determinado el marco inercial de referencia, definidas las coordenadas y ejes, precisadas las condiciones específicas del movimiento si las hay, deben plantearse las componentes de la segunda Ley de Newton en los ejes y direcciones elegidos. Estas componentes de la segunda ley se conocen a menudo como ecuaciones de movimiento del cuerpo y permiten expresar su aceleración en una posición o situación general.

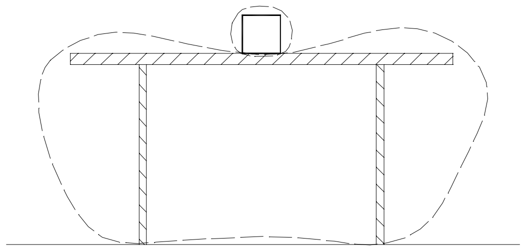
Cinemática

Conocida la aceleración en posición general se puede, si es del caso, hacer el estudio cinemático del movimiento, es decir, la determinación de unas condiciones iniciales, la integración para obtener las funciones velocidad y posición en situación general y, en fin, el análisis de situaciones particulares.

La variedad de movimientos que pueden estudiarse en la dinámica aplicando las leyes de Newton es enorme. Los aspectos indicados antes, señalan puntos fundamentales que deben tenerse en cuenta cuando va a estudiarse un movimiento y hay que usarlos de manera organizada y reflexiva, aunque flexible. Las bases del análisis dinámico del movimiento de un cuerpo, las leyes de Newton, no son evidentes ni intuitivas. Hay que aprender a utilizarlas. Y es preciso recordar también que el objetivo de la mecánica es el estudio de los movimientos de los cuerpos del mundo real, mediante unos modelos físico-matemáticos. Y para aprender a conocer la calidad de la correspondencia entre los movimientos modelados, idealizados, y los movimientos reales, es imprescindible la realización experimental, unas veces precisa y refinada, pero otras veces cualitativa y aproximada; unas veces en el laboratorio de mecánica, pero, muchas otras veces, en la vida cotidiana.

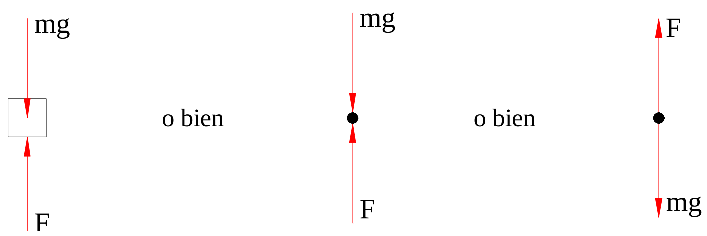
1. EJEMPLO

Bloque en reposo en una mesa horizontal.

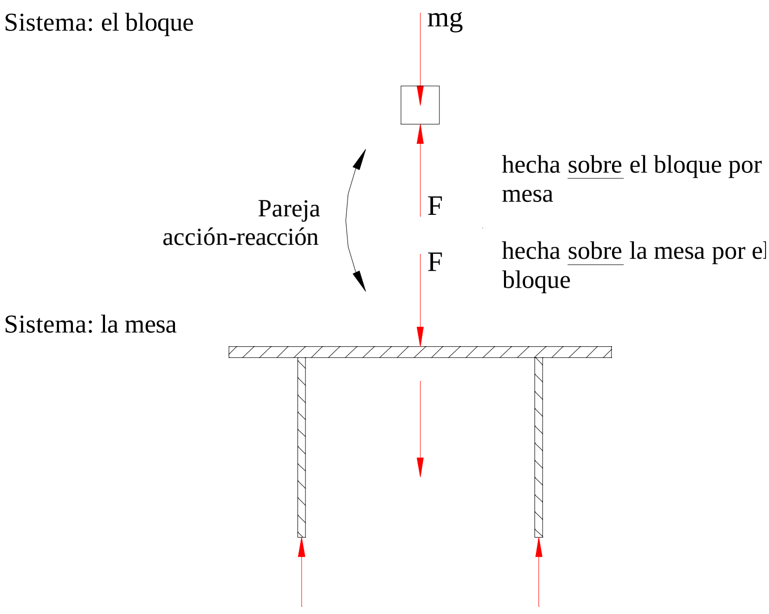


Sistema mecánico: el bloque, considerado como una partícula. En primer lugar hay que determinar las fuerzas que actúan sobre el bloque. Para "aislar" el sistema bloque, piense en una superficie que rodea el bloque (representada en el dibujo como una línea punteada). Las fuerzas sobre el bloque pueden ser, o fuerzas gravitacionales "a distancia", o fuerzas de contacto. La línea punteada muestra con cuáles cuerpos hay contacto. En este caso, llamando m la masa del bloque, tendremos el peso del bloque, atracción gravitacional hecha por el planeta tierra sobre el bloque, de valor mg, y la fuerza F de contacto hecha por la mesa sobre el bloque

El **diagrama de fuerzas** sobre el bloque será:



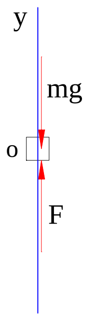
Estamos tratando al bloque como si fuese una partícula, y los dos diagramas de la derecha así lo muestran, en uno las flechas que indican la dirección de los vectores, "entran" a la partícula y en el otro dichas flechas "salen" de ella. Los tres diagramas son equivalentes y se usan, pero en este caso el diagrama de la izquierda muestra con mayor claridad donde se aplica la fuerza de contacto F hecha por la mesa y por eso lo preferimos. Usualmente en los diagramas sólo indicaremos la magnitud de las fuerzas, pues sus direcciones ya están señaladas.



Veamos por un momento el sistema mecánico "la mesa" para ilustrar el manejo de la tercera ley de Newton. Así como hay una fuerza, de magnitud F, hecha sobre el bloque por la mesa, que se dibuja en el diagrama de fuerzas del bloque, hay una fuerza, de igual magnitud F y dirección contraria, hecha sobre la mesa por el bloque, que aparece en el diagrama de fuerzas de la mesa. Esa pareja "acción–reacción", aparece siempre en diagramas de fuerzas de cuerpos diferentes. Es de gran importancia saber responder con toda claridad, siempre que se dibuja una fuerza, sobre cuál cuerpo material actúa y por cuál cuerpo es hecha.

Las otras fuerzas que actúan sobre la mesa son su propio peso y las fuerzas de contacto hechas por el piso, pero estudiaremos ahora el sistema bloque.

Sistema mecánico: el bloque. Diagrama de fuerzas. Situación general.



Marco inercial. Ejes. Condiciones específicas.

Un marco de referencia localmente fijo a la tierra es, como ya dijimos, muy aproximadamente inercial. Diremos simplemente marco inercial el edificio, o el piso, o tierra. Elijamos un eje *y* hacia arriba y fijemos su origen en la mesa. Como el bloque está en reposo, siempre estará en el origen. Esa es la condición específica de este "movimiento". Matemáticamente,

$$y = 0 \quad , \qquad v_y = 0 \quad , \qquad a_y = 0 .$$

Segunda Ley de Newton.

La segunda ley de Newton es vectorial, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. La componente vertical queda,

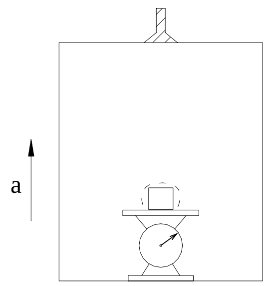
$$\sum F_y = m a_y \qquad : \qquad F - mg = 0 .$$

La suma de fuerzas sobre el bloque es cero y se dice entonces que el bloque está en equilibrio. En este caso, la fuerza F hecha por la mesa es entonces

$$F = mg .$$

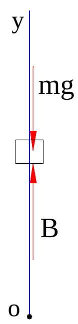
2. EJEMPLO

Un bloque de masa m descansa sobre una báscula de resorte, dentro de un ascensor que sube con aceleración a. ¿Cuánto marca la báscula?

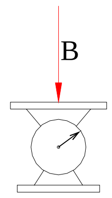


Sistema mecánico: el bloque

Diagrama de fuerzas en posición general.



B es la fuerza de contacto hecha por la báscula sobre el bloque.



La fuerza que registra la báscula es la fuerza de igual magnitud B y dirección contraria hecha, de acuerdo a la tercera ley de Newton, sobre la báscula por el bloque.

Marco inercial. Ejes. Condiciones especiales

El marco inercial, ligado a tierra, es el edificio. El ascensor, si bien es un marco de referencia, no es inercial por tener aceleración. Fijemos un eje *y* positivo hacia arriba en el edificio, con origen en el piso del edificio. Es importante notar que, como el diagrama de fuerzas se hace en una posición genérica cualquiera, el origen no puede estar en el bloque: el origen es un punto fijo del edificio y el bloque se está moviendo. Como el bloque está en reposo respecto a la báscula y al ascensor, su aceleración respecto al edificio es igual a la del ascensor y así el movimiento tiene una condición específica que es:

$$a_y = a\,.$$

Segunda ley de Newton

$$\sum F_y = m a_y \qquad : \qquad B - mg = ma$$

por tanto

$$B = m(g+a)\,.$$

Hemos definido el peso de un cuerpo como la fuerza de atracción gravitacional hecha sobre él y según eso el “peso” del bloque mientras sube aceleradamente es mg. Pero hay otra noción de lo que es el “peso” que hay que comprender .

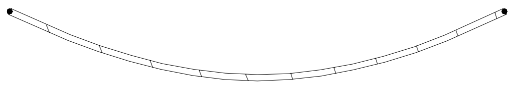
Según esta acepción, el “peso” de un cuerpo es la fuerza que éste ejerce sobre la báscula en la cual se encuentra en “reposo” dicho cuerpo. En este sentido del término, el “peso”, medido por la báscula, sería $m(g+a)$. Si el ascensor se encuentra bajando con aceleración de magnitud a, es fácil ver que, como $a_y = -a$, $B = m(g-a)$. Si el ascensor está cayendo libremente, de modo que $a = g$, tendremos $B = 0$. En el segundo sentido del término “peso”, el bloque simplemente no pesa, se encuentra “flotando” en el ascensor, en el estado llamado de ingravidez.

Ambos conceptos de lo que es el “peso” se usan ampliamente y son correctos y útiles. Sin embargo preferiremos la primera acepción del peso como fuerza de atracción gravitacional, por el énfasis que queremos hacer en las fuerzas “de interacción” y por el propósito de estudiar el movimiento respecto a marcos inerciales hasta muy avanzada la mecánica. Incluso en el caso en que la báscula se encuentre en reposo en un punto de la superficie terrestre, hay una pequeña discrepancia en magnitud y dirección entre la fuerza de atracción gravitacional y la fuerza sobre la báscula, debido a la pequeña aceleración que proviene del movimiento de la tierra. Sin embargo, como ya hemos dicho, trataremos un marco de referencia fijo a la superficie terrestre como inercial, haciendo caso omiso de esa pequeña aceleración, en el estudio de muchos movimientos.

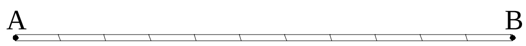
3.5.1 La tensión en una cuerda

Vamos a introducir uno de los sistemas mecánicos más notables e importantes: una cuerda flexible. El hilo delgado y tenso del albañil y del constructor, verdadera materialización de lo que es una recta geométrica; los cables de una línea de transmisión o de un puente colgante; las cuerdas vibrantes de un violín o de un piano, sugieren el amplio papel que ocuparán las cuerdas en la mecánica.

Consideremos en primer lugar una cuerda tensa, fija en sus extremos a dos soportes al mismo nivel. Si la cuerda es masiva, si su peso es apreciable, si es un grueso cable o una cadena, colgará en un plano vertical siguiendo una curva célebre, una catenaria (que viene de catena: cadena),

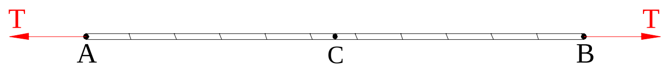


pero si la cuerda es un hilo delgado muy tenso, su peso influye poco, podemos despreciarlo, y la cuerda tomará la forma de una recta horizontal.

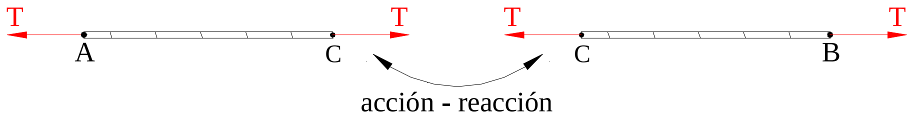


Tomemos como sistema mecánico la cuerda entera AB.

Como la cuerda está en equilibrio y estamos despreciando su peso, las fuerzas hechas por los soportes A y B sobre la cuerda serán iguales en magnitud, que llamaremos T, y de dirección contraria.

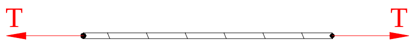


Tomemos ahora como sistema mecánico los trozos de cuerda AC y CB.



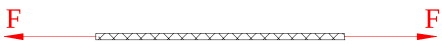
Como el trozo AC se encuentra en equilibrio, las fuerzas sobre él en A y en C son de igual magnitud, T, y dirección contraria. La fuerza en C, fuerza de contacto entre dos trozos de cuerda, es hecha por el tramo de la derecha sobre el de la izquierda. Sobre el otro tramo CB estará en C la fuerza de contacto hecha esta vez por el trozo izquierdo sobre el derecho.

Así, cualquier trozo de la cuerda que "aislemos" o separemos con la mente para estudiarlo, estará sometido siempre en sus extremos a dos fuerzas de igual magnitud T y dirección contraria,

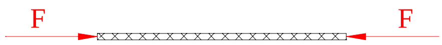


y cualquiera de esas fuerzas se llama simplemente la tensión en la cuerda.

La flexibilidad de la cuerda significa que ésta se puede doblar o flexionar y comprimir sin ningún tipo de resistencia, a diferencia de una barra o varilla sólida que se resiste a ser doblada o flexionada, y que puede estar sometida tanto a fuerzas de **tracción**:



como de **compresión:**



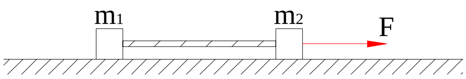
Esta última situación, posible pues en una varilla, es imposible en una cuerda en la que la tensión es siempre una fuerza de tracción.

Las cuerdas reales tienen masa. Es más, al tensionarse, sufren deformaciones de estiramiento. Pero en muchas situaciones su masa es pequeña en comparación con otras masas involucradas y sus estiramientos son irrelevantes y por tanto, en muchos casos, trabajaremos con un modelo, **cuerda ideal**, no cuerpo real sino ente de razón, inextensible y sin masa, y cuya función es transmitir una tensión de un punto a otro.

Para comprender bien esta función de la cuerda, examinemos ahora la siguiente situación.

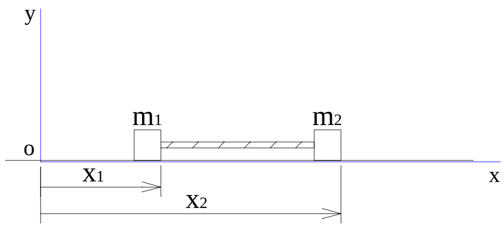
3. EJEMPLO

Dos bloques unidos por una cuerda se mueven sobre una superficie horizontal lisa. El bloque m_2 se jala mediante una fuerza F. Hallar la aceleración y la tensión en la cuerda.



Como la superficie es lisa, no hay fricción y las fuerzas de contacto hechas sobre los bloques son perpendiculares o normales a la superficie y por eso las llamaremos N_1 y N_2.

Marco inercial. Ejes. Restricciones o condiciones especiales del movimiento.



Marco inercial: el piso. Fijemos en el piso un origen 0 y unos ejes *x, y*. En posición general, la longitud ℓ de la cuerda, constante, es

$$\ell = x_2 - x_1,$$

que, derivando, queda

$$0 = v_{2x} - v_{1x}$$

$$0 = a_{2x} - a_{1x},$$

o sea que, lo que en este caso es bastante evidente, los dos bloques se mueven con la misma velocidad, $v = v_{1x} = v_{2x}$, y la misma aceleración, $a = a_{1x} = a_{2x}$. Esto es lo que posibilita el tratar al sistema mecánico conjunto de los dos bloques como una sola partícula con velocidad v y aceleración a.

En el eje *y* no hay movimiento y así

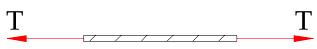
$$y_1 = y_2 = 0$$

$$v_{1y} = v_{2y} = 0$$

$$a_{1y} = a_{2y} = 0.$$

Sistemas mecánicos

Consideremos en primer lugar la cuerda que une los bloques.

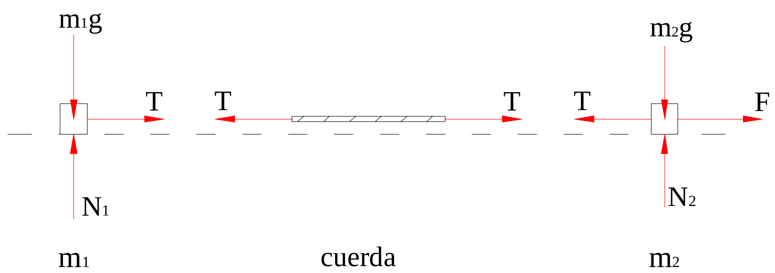


Con los ejes que ya señalamos, la cuerda esta moviéndose en x con aceleración a y entonces la segunda ley aplicada a la cuerda sería

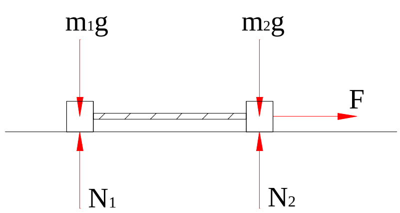
$$\sum F_x = (\text{masa de la cuerda}) \times a \,.$$

Si despreciamos la masa de la cuerda, $\sum F_x = 0$ y por eso las tensiones tienen igual magnitud T a ambos lados, aunque haya aceleración. Si tuviésemos en cuenta la masa de la cuerda, la tensión variaría a lo largo de su longitud.

Las fuerzas sobre los tres sistemas mecánicos m_1, cuerda y m_2, están concatenadas por la ley de acción-reacción, como se ve en los tres diagramas de fuerzas.



Pero aquí hay además otro sistema mecánico importante: el conjunto de los bloques y la cuerda que, como tienen el mismo movimiento, pueden ser tratados como una sola partícula. En este caso las fuerzas entre los bloques y la cuerda son fuerzas internas que no aparecen en el diagrama de fuerzas, en el cual sólo figuran las fuerzas externas sobre el sistema.



Segunda Ley de Newton.

Las expresiones de las componentes en x de la segunda ley para m_1, m_2 y el sistema conjunto, no son independientes. En efecto, si se suman las de m_1 y m_2 se obtiene la del sistema conjunto, como se comprueba fácilmente.

Usaremos ahora el sistema conjunto,

componente x : $\quad F = (m_1 + m_2) a$,

con lo que $\quad a = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$,

y el sistema m_1 ,

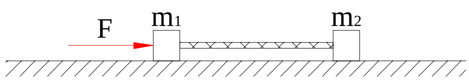
en x : $\quad T = m_1 a$,

con lo que, $\quad T = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} F$.

Una vez comprendido cabalmente el sistema cuerda, suele omitirse su diagrama, pasando directamente de m_1 a m_2 .

4. EJERCICIO

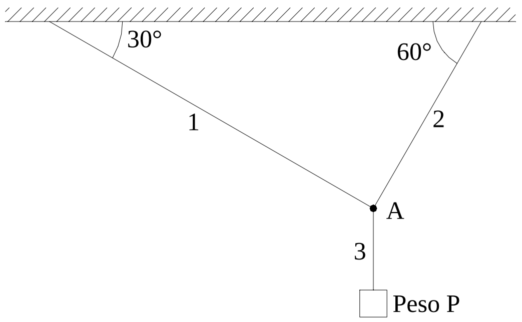
Superficie lisa



Calcule la fuerza en la varilla (de masa despreciable) y muestre que está a compresión. Haga los diagramas de m_1, la varilla, m_2 y el sistema conjunto.

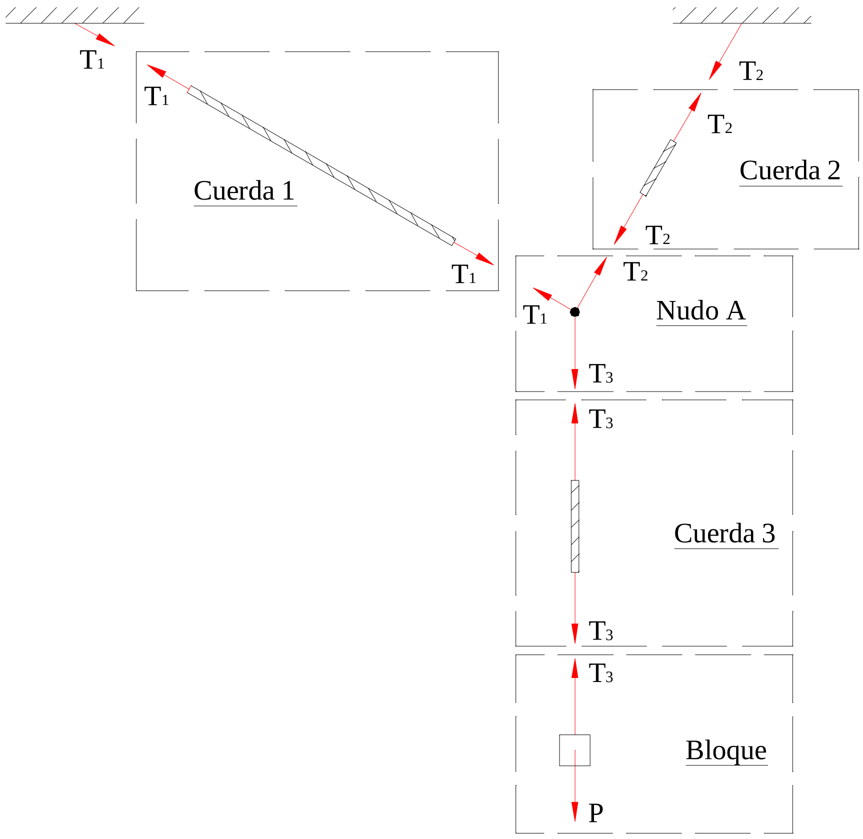
Hay dos alternativas: suponer la varilla a tracción; ser consecuente con ello y el resultado negativo indica que es al contrario. O bien, intuir que está a compresión y asumirlo así, consistentemente, desde el comienzo, para obtener un resultado positivo.

5. EJERCICIO



Tres cuerdas anudadas en A. Hallar sus tensiones.

Tercera Ley. Conexión entre los sistemas: bloque, cuerda 1, cuerda 2, cuerda 3 y nudo A. Para aislar este último sistema, piense en una superficie alrededor del nudo, que corta las tres cuerdas que lo forman.



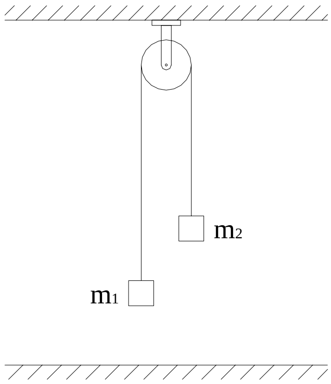
De análoga manera la tercera ley permite concatenar las fuerzas en estructuras o máquinas complejas, en reposo o en movimiento.

Por el equilibrio del bloque, $T_3 = P$. El sistema mecánico esencial es el nudo A. Como está en equilibrio, sumatoria de fuerzas, componentes horizontal y vertical, se anulan y quedan dos ecuaciones para las dos incógnitas T_1 y T_2.

$$T_1 = \frac{P}{2}$$

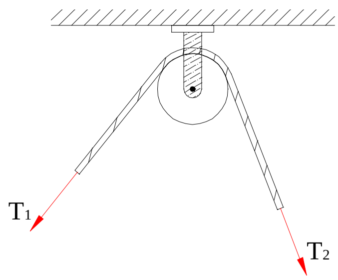
$$T_2 = \frac{P\sqrt{3}}{2}$$

6. EJEMPLO. Máquina de Atwood



De una cuerda que pasa por una polea se suspenden verticalmente dos bloques de masas m_1 y m_2. Hallar las aceleraciones de los bloques y la tensión en la cuerda.

Presentemos en primer lugar algunos aspectos de una máquina notable, **la polea**, sistema mecánico de gran utilidad e importancia. Una polea es un disco o rueda, usualmente con un borde ranurado, que puede rotar alrededor de un eje, y que se usa para cambiar la dirección de una cuerda o de un cable.



En una polea real, masiva, que se encuentra en rotación debido a la fricción con la cuerda que está en contacto con ella, las tensiones a ambos lados de la cuerda son en general diferentes. La polea, debido a su rotación, es un sistema mecánico que no puede ser tratado como una partícula y no podemos por tanto ahora estudiarlo completamente. Pero el funcionamiento de una polea idealizada, cuyas características se cumplen bien en muchas situaciones, es muy simple. Veamos.

Una **polea ideal** tiene dos características:

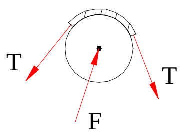
masa despreciable
no hay fricción con el eje

La fricción con el eje de muchas poleas, montadas en rodamientos y balineras de calidad, es realmente muy baja, y es la fricción que podemos despreciar en una polea, no así la fricción entre la cuerda y el disco rotante propiamente dicho, fricción que garantiza la rotación del disco y que nunca es despreciable.

Pues bien, en una polea ideal, esté en reposo o en movimiento, las tensiones de la cuerda a ambos lados son iguales:

$$T_1 = T_2 = T \; .$$

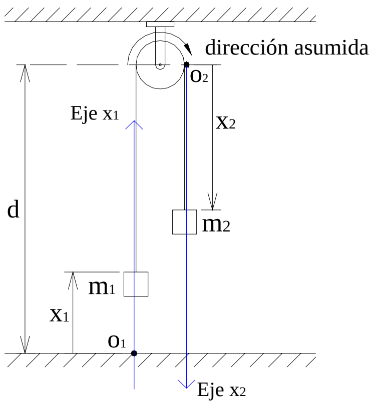
El sistema mecánico polea ideal, que comprende el disco y el trozo de cuerda en contacto con él, tendrá pues el siguiente diagrama de fuerzas,



en el que F es la fuerza hecha sobre la polea por el eje que la sostiene. Como la masa de la polea ideal es nula, esté el centro de la polea fijo o trasladándose, se cumplirá siempre que $\sum \vec{F}$ (sobre la polea) $= 0$.

Volvamos a la máquina de Atwood. Ya habíamos presentado las posibles elecciones de ejes para vincular los movimientos de m_1 y m_2. La más simple aquí es asumir una dirección de movimiento y elegir los ejes en consecuencia.

Marco inercial. Ejes. Movimientos ligados



La longitud de la cuerda, constante, es

$$\ell = (d - x_1) + \pi R + x_2 ,$$

y derivando,

$$0 = -\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -v_1 + v_2$$

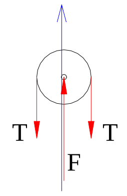
$$0 = -\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -a_1 + a_2 ,$$

y así,

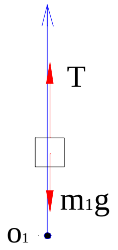
$$a_1 = a_2 . \tag{1}$$

Sistemas mecánicos

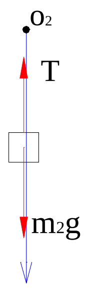
Omitiendo los trozos de cuerda ideal que ya hemos estudiado antes, los tres sistemas importantes son: el bloque m_1 (como una partícula); el bloque m_2 (partícula) y la polea ideal (que no es una partícula, pero cuyo funcionamiento ya conocemos). Sus diagramas de fuerzas en una situación general cualquiera son, Polea



Bloque m_1



Bloque m_2



Hemos vuelto a dibujar los ejes ya elegidos para m_1 y m_2 para facilitar las componentes de la segunda ley. Para la polea elegimos un eje como se indica.

Segunda ley de Newton

La componente de la segunda ley para cada sistema, según el eje indicado, es

Polea $\quad F - 2T = 0$

$m_1 \quad T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (2)$

$m_2 \quad m_2 g - T = m_2 a_2 \quad (3)$

La ecuación para la polea permite hallar la fuerza hecha por el eje, F, una vez se conozca T y no la vamos a numerar, para darle sencillez a la estructura algebraica de tres ecuaciones, la ligadura y las leyes de Newton para m_1 y m_2, para las 3 incógnitas a_1, a_2 y T. Resolviendo,

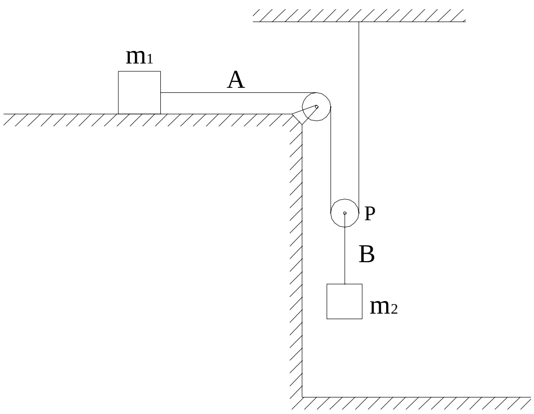
$$a_1 = a_2 = \frac{g\left(m_2 - m_1\right)}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{2\ m_1\ m_2\ g}{m_1 + m_2}.$$

Si $m_2 < m_1$, las aceleraciones son negativas y los movimientos de los bloques, si se sueltan desde el reposo, serán al contrario de lo asumido.

Graduando los valores de m_1 y m_2, se pueden obtener en la máquina de Atwood movimientos con aceleración constante muy baja, determinables experimentalmente por métodos cinemáticos, y así se puede obtener el valor de g. Sin embargo, si el trabajo requiere gran precisión o si la polea tiene una masa apreciable, la representación como polea ideal no es suficiente. En el estudio de los cuerpos rígidos volveremos a visitar esta máquina para tener en cuenta la masa de la polea.

7. EJERCICIO



Superficies lisas. Poleas y cuerdas ideales. Hallar las aceleraciones de m_1, m_2 y P (centro de la polea móvil) y las tensiones en las cuerdas A y B.

Sugerencia: Ejes del ejercicio 10 de movimiento rectilíneo.

Ecuaciones:

1) longitud de A,
2) longitud de B,
3) componente horizontal de la ley de Newton para m_1,
4) ley de Newton para m_2,
5) $\sum$ Fuerzas $= 0$ para polea ideal móvil,

Sistema (¡ de ecuaciones muy sencillas !) de 5 ecuaciones para las 5 incógnitas a_1, a_2, a_p, T_A y T_B.

Con $a' = \dfrac{m_2\ g}{4\ m_1 + m_2}$,

$$a_1 = 2a'$$

$$a_2 = a_p = a'$$

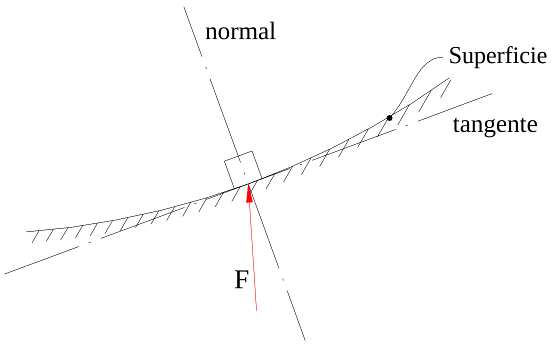
$$T_A = 2\ m_1\ a'$$

$$T_B = 4\ m_1\ a'$$

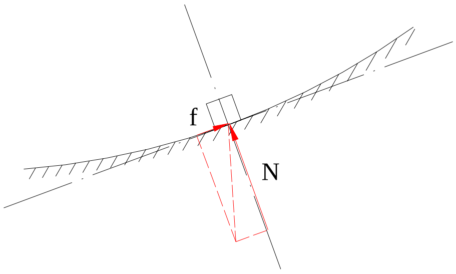
3.5.2 Fuerzas de contacto entre superficies de sólidos. La fuerza normal y la fuerza de fricción

Cuando un cuerpo sólido, rígido, intenta deslizar o efectivamente desliza sobre la superficie de otro sólido, se presenta en dicha superficie una fuerza de contacto hecha por un cuerpo sobre el otro.

Consideremos la superficie representada en la figura, y centremos la atención en la fuerza de contacto F hecha sobre un bloque que intenta deslizar hacia abajo por la superficie, o que realmente se está deslizando hacia abajo por ella.



Tracemos una perpendicular o normal y una tangente a la superficie de deslizamiento y consideremos las componentes de la fuerza de contacto F sobre el bloque en esas direcciones.



La componente de la fuerza de contacto sobre el bloque, perpendicular o normal a la superficie de deslizamiento, se llama **fuerza normal** y la designaremos como N, y la componente tangencial es **la fuerza de fricción,** que denotaremos como f. Hay, por supuesto, de acuerdo a la tercera ley, fuerzas de igual magnitud y dirección contraria hechas sobre el piso por el bloque.

Tanto la fuerza normal como la fuerza de fricción provienen de incontables interacciones de tipo electromagnético entre los átomos y moléculas de las capas superficiales de los dos sólidos. Macroscópicamente hablamos de "contacto" entre ellos, pero a nivel microscópico ese concepto pierde validez y lo que hay es una gran proximidad de átomos y moléculas. La descripción microfísica de ese "contacto" sería enormemente compleja y por ello en mecánica clásica se trabaja con las fuerzas macroscópicas de contacto, N y f , que engloban de manera útil y simple aquella complejidad.

La fuerza normal N, perpendicular o normal a la superficie de contacto, es una fuerza con un comportamiento muy diferente a una fuerza como el peso o atracción gravitacional. Para verlo piense en la siguiente situación: si una persona de peso P está quieta de pie en un piso horizontal, el piso ejerce sobre ella, hacia arriba, una fuerza normal $N = P$. Pero si la persona salta hacia arriba, pone en acción movimientos musculares y ejerce sobre el piso una fuerza N mayor que P. El piso entonces "responde" con una fuerza normal de reacción $N > P$. La normal N es una fuerza que asume cualquier valor que sea necesario y no tiene un límite claramente determinado, salvo la ruptura o colapso del material. La persona puede estar quieta encima de una delgada tabla, pero si intenta saltar hacia arriba la tabla se quiebra indicando que la normal N copó su límite.

La fricción o rozamiento que estudiaremos ahora, es la fuerza tangencial a la superficie de contacto entre cuerpos sólidos secos y se llama a veces fricción seca, para distinguirla de la fricción en fluidos que se presenta, bien cuando un cuerpo se mueve en el seno de un fluido, bien cuando hay lubricantes entre las superficies. Coulomb estudió experimentalmente la fricción seca y a él se deben las leyes que vamos a presentar, por lo que dicha fricción se llama también fricción de Coulomb.

Si el bloque que habíamos mostrado está efectivamente deslizándose por la superficie de contacto, es decir si hay una velocidad relativa del bloque respecto al piso, la fuerza de fricción se llama fuerza de fricción dinámica, f_d, y sus características son:

Fuerza de fricción dinámica sobre el bloque.

Presente cuando **hay velocidad relativa** del bloque respecto al piso.

Dirección: opuesta a la velocidad relativa del bloque respecto al piso

Magnitud: $f_d = \mu_d N$

La fuerza de fricción dinámica o cinética es proporcional a la normal N y la constante de proporcionalidad se llama el **coeficiente dinámico o cinético de fricción**, μ_d. La fricción no depende del área de las superficies en contacto y varía muy poco con la velocidad relativa, de modo que el coeficiente μ_d depende básicamente de los materiales y del estado de las superficies en contacto. El coeficiente μ_d es adimensional y su valor se determina experimentalmente.

Una característica de la fricción seca, que la distingue drásticamente de la fricción en fluidos, es la existencia de una fricción estática. El bloque que dibujamos antes, perfectamente puede encontrarse en reposo respecto a la superficie inclinada del piso, gracias a la presencia de una fuerza de fricción estática, f_e, cuyas características son:

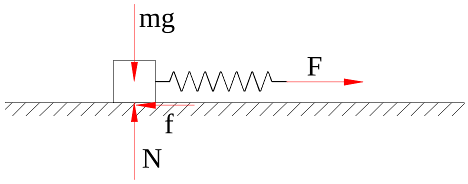
Fuerza de fricción estática sobre el bloque.

Actúa cuando **no hay velocidad relativa** del bloque respecto al piso.

Dirección: opuesta a la velocidad relativa que tendría el bloque respecto al piso si no hubiese fricción.

Magnitud: $f_e \le \mu_e N$

El coeficiente adimensional μ_e es el **coeficiente estático de fricción**. El hecho notable de que la fuerza de fricción estática, a diferencia de la fuerza de fricción dinámica, puede variar su valor desde cero hasta un valor máximo $\mu_e N$, y por eso está caracterizada por una desigualdad, puede verse bien en el siguiente montaje experimental.

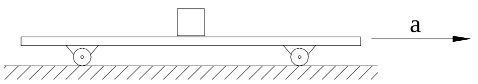


Un bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal, y se jala, mediante un resorte blando, con una fuerza también horizontal F, ejercida por la mano, de modo que pueda variarse a voluntad. Cuando la fuerza F vale cero, el resorte no tiene ningún estiramiento y no hay fuerza de fricción, $f = 0$. Si se aumenta un poco la fuerza F, el resorte se estira proporcionalmente, mostrando visualmente la presencia de dicha fuerza, pero el bloque permanece en reposo, indicando con esto que está actuando una fuerza de fricción estática f, de igual magnitud y dirección contraria a F. Esta fuerza F puede seguir aumentando gradualmente, lo que se observa en una mayor deformación del resorte, sin que el bloque se mueva, y por tanto la fuerza de fricción estática va también aumentando gradualmente para equilibrar a F. Llega un momento, sin embargo, al continuar aumentando F, en el que el bloque comienza a moverse, indicando así que la fuerza de fricción estática llegó a su valor máximo posible. Ese valor máximo es proporcional a la normal mediante el coeficiente estático μ_e, que, de nuevo, sólo depende de la naturaleza y estado de las superficies en contacto:

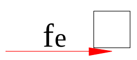
$$f_e \text{ máxima } = \mu_e N .$$

Esa situación límite, idealizada, en la que la fuerza de fricción estática toma un valor máximo y el bloque se encuentra a punto de moverse, se suele llamar situación de movimiento inminente. Cuando el bloque comienza a moverse respecto al piso, la fuerza de fricción es entonces dinámica y lo que se comprueba experimentalmente es que dicha fuerza, como ya dijimos, tiene un valor aproximadamente constante para un amplio rango de velocidades relativas y, además, en ciertos casos, es un poco menor que la fuerza estática máxima, y así el coeficiente dinámico μ_d, puede ser levemente inferior al coeficiente estático μ_e.

La fuerza de fricción es estática cuando no hay movimiento **relativo** entre las superficies de los cuerpos en contacto, aunque estos cuerpos estén moviéndose respecto a un cierto marco inercial de referencia. Por ejemplo, si un bloque está en reposo respecto a una plataforma que se mueve con aceleración a hacia la derecha, la fuerza de fricción hecha por la plataforma sobre el bloque es estática, aunque el bloque mismo se esté moviendo aceleradamente respecto a un marco inercial fijo a tierra.



Si no hubiere fricción, el bloque se movería respecto a la plataforma hacia la izquierda y por eso la fuerza de fricción estática sobre el bloque es hacia la derecha. En efecto, esa es la fuerza que le produce al bloque su aceleración hacia la derecha respecto al marco inercial de referencia, de acuerdo a la segunda ley de Newton.

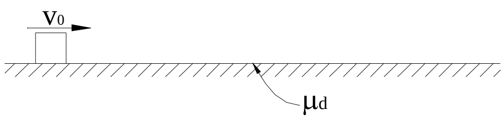


Las fuerzas de fricción desempeñan un importante papel en el movimiento de los cuerpos macroscópicos. En algunos casos sus efectos son indeseables, como, en un automóvil, entre los pistones y los cilindros en el motor, o en piezas móviles como engranajes, ejes y rodamientos, y se busca minimizarlos con pulimiento y lubricantes. En otros casos, en cambio, los efectos de la fricción seca son deseables, fundamentales, como entre las pastas y los discos de frenos, como entre las correas y las poleas, como entre las llantas y el piso, bien sea al acelerar, frenar o dar curvas, y se busca acrecentarlos con materiales y rugosidades adecuados.

Los elementos del rozamiento o fricción seca que hemos presentado, provienen pues de estudios experimentales y se aplican razonablemente bien al contacto de superficies secas de cuerpos sólidos relativamente rígidos. En cuerpos tan deformables como las llantas o neumáticos de un automóvil la fricción es más compleja. Es importante notar que las leyes del rozamiento, útiles y valiosas, son, no obstante, aproximaciones, con un carácter muy diferente al de leyes fundamentales de interacción como la atracción gravitacional.

8. EJEMPLO

Se lanza un bloque con velocidad v_o y desliza por una superficie horizontal rugosa hasta detenerse. Si el coeficiente dinámico de fricción es μ_d , hallar la distancia recorrida.

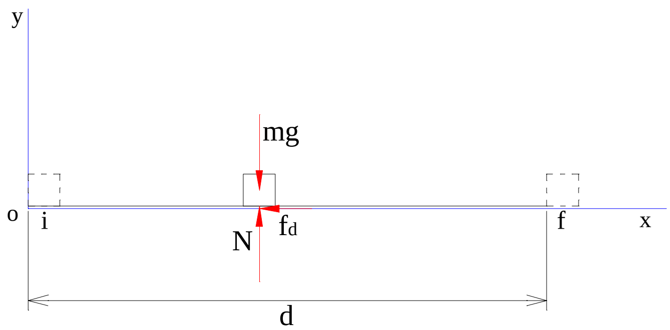


Sistema mecánico: El bloque

Marco Inercial. Ejes. Condiciones específicas

Marco inercial: El piso horizontal fijo en tierra. Eje horizontal *x*, vertical *y*, con origen en la situación inicial de lanzamiento. En posición general, $y = 0$, $v_y = 0$, $a_y = 0$.

Diagrama de fuerzas en posición general:



Sea m la masa del bloque. La fuerza de fricción dinámica, opuesta a la velocidad es f_d .

Segunda Ley de Newton

Componente x : $-f_d = m\ a_x$

Componente y : $N - mg = 0$.

Con f_d, fuerza de fricción dinámica

$$f_d = \mu_d N .$$

De la componente *y*,

$$N = mg .$$

Por tanto

$$a_x = -\mu_d g .$$

Cinemática

Las condiciones iniciales son, en la situación i, lanzamiento en el origen,

$$\text{en} \quad t = 0 \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ v_x &= v_o . \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena e integrando, tendremos, en situación general,

$$v_x^2 = v_o^2 - 2 \mu_d g x .$$

En la situación final f, cuando el bloque se detiene a una distancia d,

$$x_f = d$$

$$v_{fx} = 0 ,$$

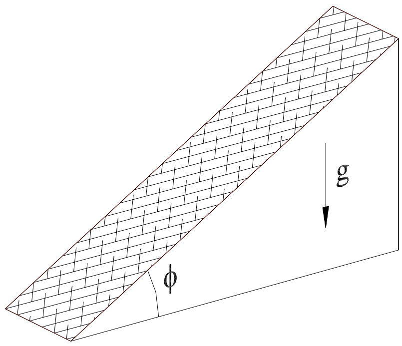
y así, particularizando, obtenemos

$$d = \frac{v_o^2}{2 \mu_d g} .$$

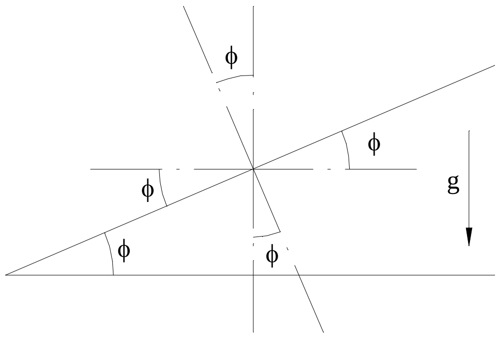
El ejemplo anterior es, obviamente, muy fácil de realizar cualitativamente con cualquier objeto que se tenga a mano y pueda deslizar sobre una superficie horizontal. Pero se trata de un cuerpo deslizando y que puede ser tratado como una partícula, porque si el cuerpo es una rueda, un objeto rodante, no puede ser tratado como una partícula sino como un cuerpo rígido que rota y habrá que estudiar con más detalle la fricción en el punto de contacto y el movimiento de rotación.

9. EJEMPLO. Bloque en reposo en un plano inclinado rugoso

Un plano inclinado, máquina importante de la mecánica, es la superficie plana de un cuerpo, superficie que forma un ángulo ϕ con el plano horizontal.



El plano inclinado suele representarse como una línea recta en un corte vertical, como se indica en la siguiente figura.

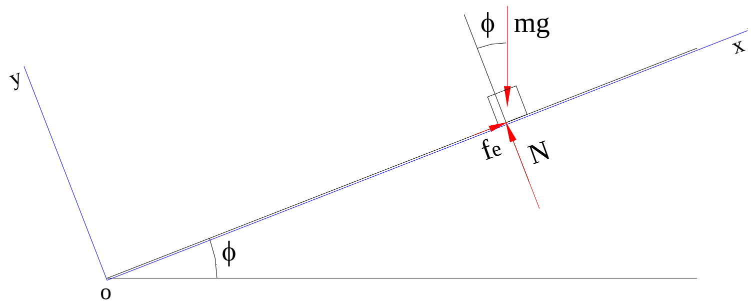


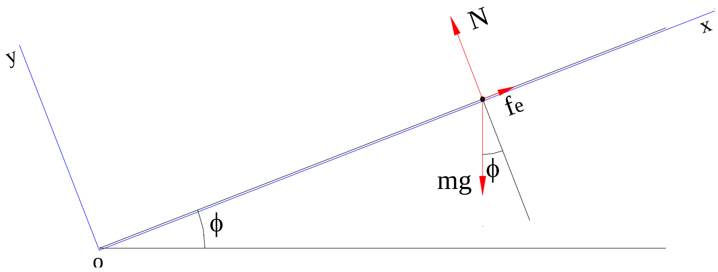
Tracemos por un punto del plano inclinado, tres rectas: una horizontal, una vertical y una normal o perpendicular al plano inclinado. Es fácil mostrar que el ángulo entre la normal y la vertical es igual a ϕ, ángulo entre la horizontal y el plano inclinado, pues ambos ángulos tienen sus lados mutuamente perpendiculares. O, si se prefiere, puede estudiarse el complemento de ϕ. En fin, resultados sencillos de la igualdad de ángulos (allí hay paralelas, ángulos rectos, ángulos opuestos por el vértice), permiten ver que hay cuatro ángulos en el punto del plano iguales a ϕ, que serán importantes en el estudio de los movimientos sobre un plano inclinado.

Consideremos ahora un bloque que se encuentra en reposo en un plano inclinado rugoso, es decir, con fricción.

Sistema mecánico. Diagrama de fuerzas

El sistema es el bloque, considerado como una partícula de masa m. Las fuerzas sobre el bloque son: el peso, atracción gravitacional hecha por la tierra, y las fuerzas de contacto hechas por el plano inclinado, normal N y fricción f_e, estática puesto que el bloque está en reposo respecto al plano inclinado.





Los dos diagramas que hemos hecho son completamente equivalentes. Ambos son útiles y se usan con frecuencia. En el primero se dibuja el bloque con un cierto tamaño y las fuerzas llegando a él. Tiene la ventaja de que se ve bien cuál es la superficie sobre la que actúan las fuerzas de contacto. Tiene el inconveniente de que, por tener un cierto tamaño, no está claro cuál es exactamente el punto de aplicación de las fuerzas al dibujarlas. Pero, tratándolo como una partícula, este punto de aplicación no es relevante. En el segundo diagrama, el cuerpo se representa como un punto y las fuerzas saliendo de él. No tiene el inconveniente del punto de aplicación, pero no se ve sobre cuál superficie actúan las fuerzas de contacto. Los diagramas son complementarios, y cuál se use dependerá de la claridad o del énfasis buscado.

Marco Inercial de referencia. Coordenadas. Condiciones particulares

El marco inercial es el propio plano inclinado, fijo a tierra. Elegimos unos ejes en dirección del plano y normal a él con origen en la base del plano inclinado. En este caso, como el bloque está en reposo, podría elegirse el origen en el bloque, ya que su situación general es fija y no variable. Como está en reposo,

$$x = \text{constante} \quad , \quad v_x = 0 \quad , \quad a_x = 0$$

$$y = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad a_y = 0$$

Segunda Ley de Newton

Como no hay aceleración, las componentes de la ley de Newton se vuelven

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 .$$

Se dice que la partícula está en equilibrio y esas son las condiciones de equilibrio, que quedan entonces,

en x: $\quad f_e - mg \operatorname{sen}\phi = 0$

en y: $\quad N - mg \cos\phi = 0$.

Con lo que se obtienen los valores de la fuerza de fricción estática f_e y de la normal N, necesarios para el equilibrio,

$$f_e = mg \operatorname{sen}\phi$$

$$N = mg \cos\phi .$$

Si $\phi = 0$, es decir, si el plano no es inclinado sino horizontal, $f_e = 0$ y $N = mg$. Ahora, al aumentar gradualmente el ángulo ϕ, la normal va disminuyendo y la fuerza de fricción necesaria para el equilibrio va aumentando. Pero la fricción estática tiene un tope máximo y así habrá un ángulo máximo, $\phi_{máx}$, para el cual es posible el equilibrio, y en el cual el bloque se encuentra en movimiento inminente. Si se aumenta más el ángulo, el bloque deslizará por el plano y la fricción será cinética o dinámica. Veámoslo matemáticamente:

Como la fricción es estática

$$f_e \le \mu_e N ,$$

remplazando los valores de f_e y N,

$$mg \operatorname{sen}\phi \le \mu_e mg \cos\phi ,$$

y por tanto

$$\tan\phi \le \mu_e .$$

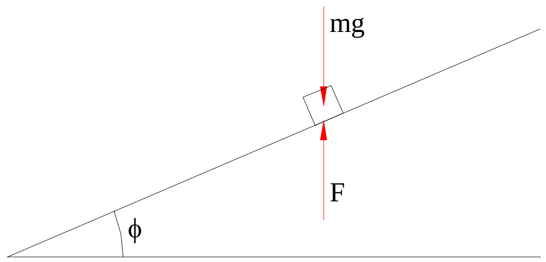
Esta es la condición para que el bloque pueda estar en equilibrio. En movimiento inminente, el máximo ángulo para el equilibrio será

$$\tan \phi_{máx} = \mu_e .$$

Esta elegante interpretación del coeficiente estático de fricción proporciona a la vez una manera experimental simple para calcularlo, midiendo el ángulo en el cual comienza a deslizarse el bloque sobre el plano. Es posible que un bloque real, que tiene un cierto tamaño, se vuelque, rotando alrededor de un extremo, antes de deslizarse. Para estudiar ese volcamiento, esa rotación, debemos usar otro modelo de la mecánica: el cuerpo rígido.

El equilibrio del bloque como partícula en el problema simple e importante que estamos discutiendo, puede mirarse también de manera vectorial,

$$\sum \vec{F} = 0 ,$$



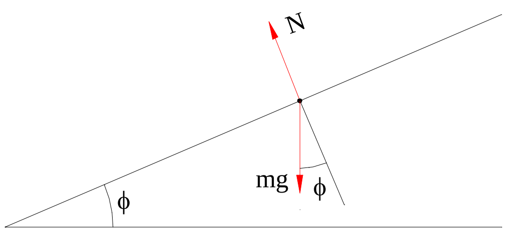
mostrando que la fuerza de contacto resultante de la normal y la fricción es una fuerza contraria al peso y de igual magnitud.

10. EJEMPLO. Plano inclinado liso

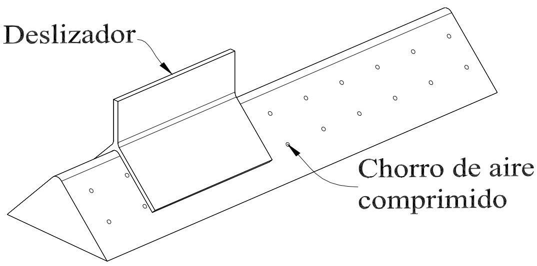
Un bloque desliza por un plano inclinado sin fricción. Hallar la aceleración de su movimiento.

Sistema mecánico: el bloque.

Diagrama de fuerzas en posición general

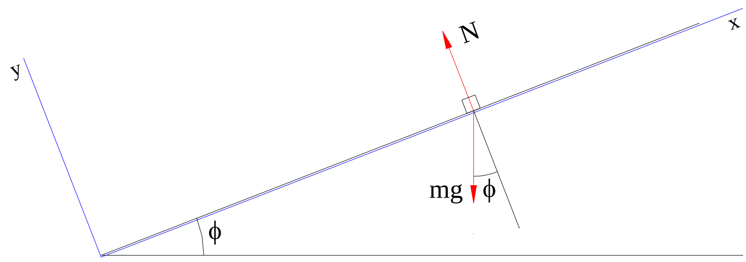


El diagrama de fuerzas es el mismo, sea que el bloque está subiendo o bajando. Por eso la aceleración es igual al subir o al bajar deslizando por el plano liso. El bloque cuyo movimiento estamos estudiando puede estarse moviendo hacia arriba por el plano inclinado, porque fue lanzado con una cierta velocidad inicial pero no hay ninguna fuerza hacia arriba hecha sobre el bloque. Experimentalmente puede obtenerse un plano con muy poca fricción mediante un riel de aire en un laboratorio de mecánica, perfil metálico con perforaciones por las que sale aire comprimido, de modo que un deslizador puesto sobre el riel queda "flotando" en un colchón de aire.

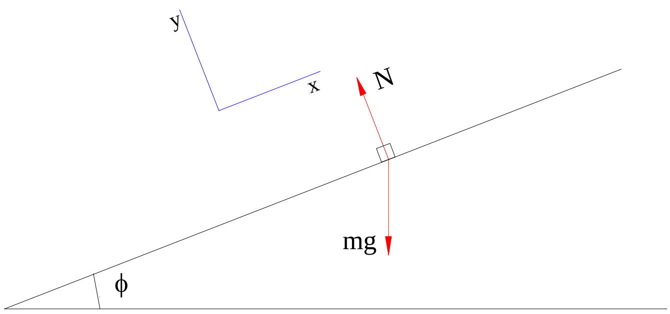


Marco Inercial. Ejes. Condiciones.

El marco inercial es el propio plano inclinado, fijo respecto a tierra. Fijemos un origen en la base del plano, con ejes hacia arriba por el plano y normal a él.

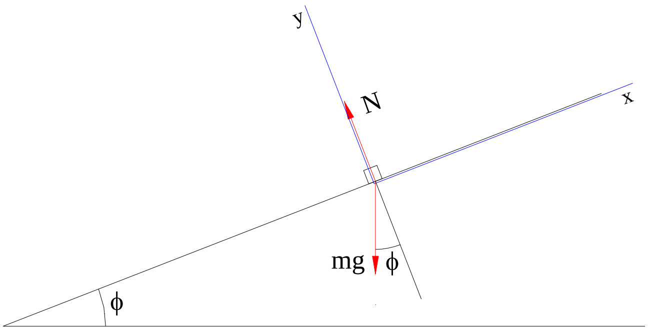


En ocasiones se indican únicamente las direcciones de los ejes *x*, *y*, sin señalar explícitamente el origen, en gráficos del siguiente estilo:



Pero marcar las direcciones de los ejes directamente en el bloque en posición general, no es correcto, pues el bloque aparece como si estuviese en el origen de las coordenadas *x*, *y*, lo cual no es cierto en una posición general: El origen está fijo en el plano y el bloque está moviéndose.

Elección inadecuada del origen de los ejes x, y.



Volviendo a la primera elección de los ejes, clara y precisa, vemos que en *y* no hay movimiento, es decir,

$$y = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad a_y = 0 .$$

Esta es la que llamamos restricción o condición específica del movimiento.

Segunda ley de Newton

Componente *x* : $\quad -mg \ \text{sen}\,\phi = m\,a_x$

Componente *y* : $\quad N - mg \ \cos\phi = 0 .$

La aceleración del bloque que desliza sobre el plano inclinado sin fricción es por tanto

$$a_x = -g \ \text{sen}\,\phi .$$

La aceleración de un cuerpo rodante, como una esfera o un cilindro, que rueda por un plano inclinado, es diferente. Esos cuerpos ya no pueden ser modelados como partículas.

11. EJERCICIO

Hallar las aceleraciones durante la subida y la bajada, de un bloque que desliza por un plano inclinado rugoso, de ángulo con la horizontal ϕ y coeficiente dinámico de fricción μ.

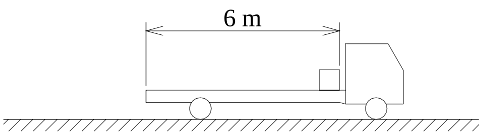
La fricción tiene dirección diferente según que el cuerpo esté subiendo o bajando. Lo mejor es elegir un eje hacia arriba en la subida y hacia abajo en el descenso. Mostrar que

$$a_{\text{subida}} = -g\left(\text{sen}\,\phi + \mu \cos\phi\right)$$

$$a_{\text{bajada}} = g\left(\text{sen}\,\phi - \mu \cos\phi\right).$$

12. EJERCICIO

Un bloque se coloca sobre la plataforma de un camión que se encuentra en reposo en una carretera horizontal.



Los coeficientes de fricción entre el bloque y la plataforma son: $\mu_e = 0.25$, $\mu_d = 0.20$.

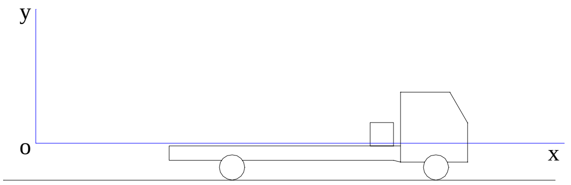
a) ¿Cuál es la máxima aceleración con la que puede arrancar el camión para que el bloque no se deslice respecto a la plataforma?

b) Si el camión arranca con una aceleración de $3 \ \mathrm{m\,s^{-2}}$, ¿ al cabo de cuánto tiempo caerá el bloque por la parte trasera de la plataforma si ésta mide 6 m ?

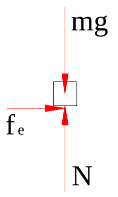
Marco Inercial: la carretera. Ejes fijos a ella con origen en la situación inicial cuando el camión arranca.

Sistema mecánico: el bloque como partícula de masa m.

a) Diagrama de fuerzas en situación general



Posición General



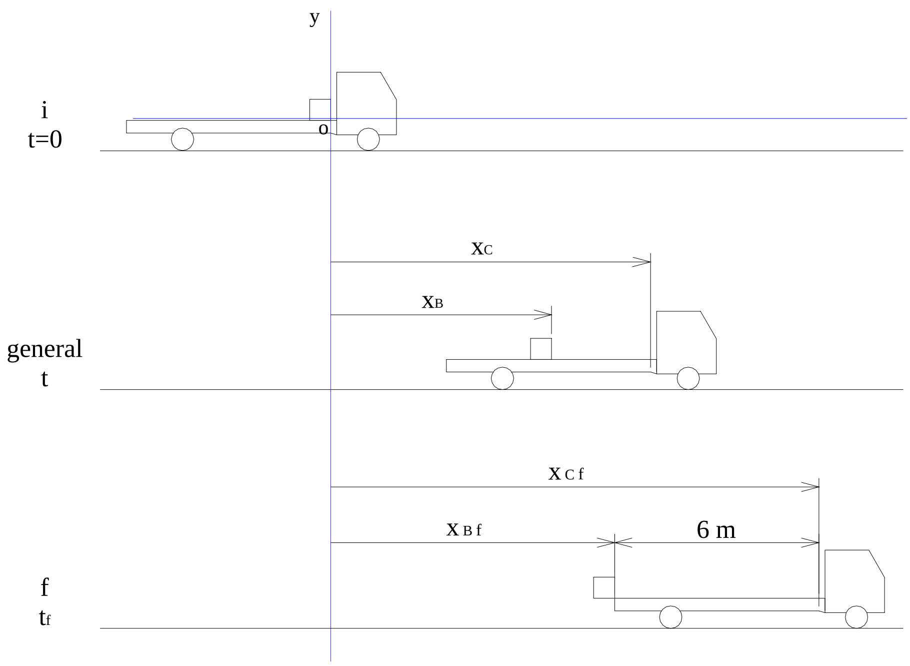
Aplicando la segunda ley, como la fricción es estática, se llega a

$$a \le \mu_e \, g \qquad , \qquad a \le 2.45 \ \mathrm{m\,s^{-2}},$$

componente *x* de la aceleración, común a bloque y camión. Entonces, para que el bloque no deslice,

$$a_{\text{máx}} = 2.45 \ \text{m}\,\text{s}^{-2}.$$

b) Es importante dibujar con claridad las situaciones inicial: camión C y bloque B arrancan; general (como $a_C = 3 > a_{\text{máx}}$, hay deslizamiento del bloque y la fricción es dinámica); y final: el bloque cae de la plataforma.



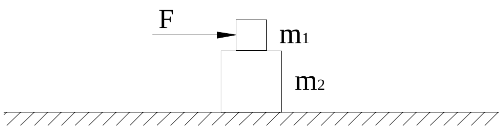
El diagrama de fuerzas en posición general, la fricción dinámica y la segunda ley, permiten hallar

$$a_B = 1.96 \ \text{m}\,\text{s}^{-2} \ .$$

La cinemática de B y de C, particularizando para la situación f, lleva a

$$t_f = 3.40 \ \text{s}.$$

13. EJERCICIO



Un bloque de masa m_1 descansa sobre otro de masa m_2, que está a su vez sobre una superficie horizontal lisa. El coeficiente estático de fricción entre los bloques es μ. ¿Cuál es la máxima fuerza horizontal F que puede aplicarse,

a) al bloque m_1 ,
b) al bloque m_2 ,

para que los bloques no deslicen entre sí?

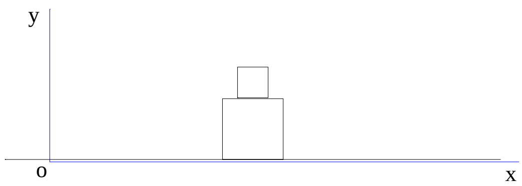
El marco inercial es el piso. Ejes fijos al piso.

m_1 en reposo relativo respecto a m_2: aceleración $a_x = a$ para ambos sistemas mecánicos.

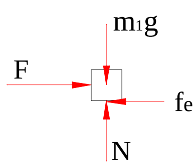
Tres sistemas: m_1 , m_2 y el sistema conjunto de m_1 y m_2 como una sola partícula de masa $m_1 + m_2$.

Ejes

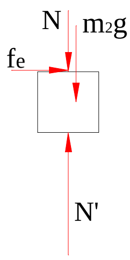
posición general



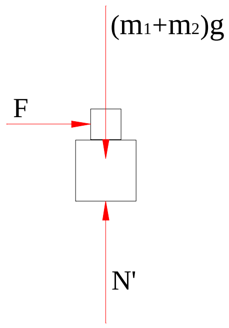
m_1



m_2



Sistema conjunto

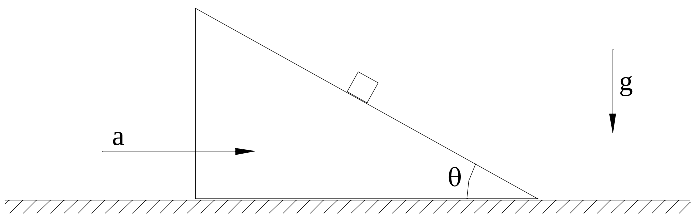


Sugerencia: Segunda ley para m_1 y para el sistema conjunto. Como $f_e \leq \mu N$,

$$F \leq \mu \frac{m_1}{m_2}(m_1 + m_2)g .$$

b) $$F \leq \mu (m_1 + m_2)g .$$

14. EJERCICIO

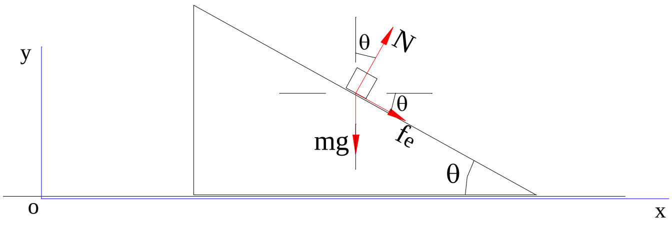


Una cuña se mueve sobre una superficie horizontal con aceleración a. El coeficiente estático de fricción entre el pequeño bloque y la cuña es μ. Calcule la máxima aceleración que puede dársele a la cuña para que el bloque no deslice respecto a ella.

Marco inercial: el piso. La cuña no es inercial. Ejes *x*, *y*, fijos al piso.

Sistema mecánico: el bloque.

Si la aceleración a es grande, el bloque tiende a deslizar hacia arriba por la cuña y por tanto la fricción es hacia abajo. La máxima aceleración para que haya reposo relativo se obtendrá cuando la fricción estática sobre el bloque sea la máxima posible hacia abajo.



La aceleración del bloque respecto al marco inercial en el piso es

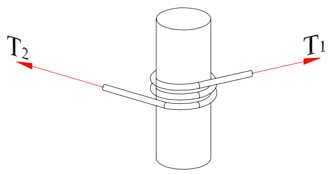
$$a_x = a$$

$$a_y = 0\,.$$

Muestre que

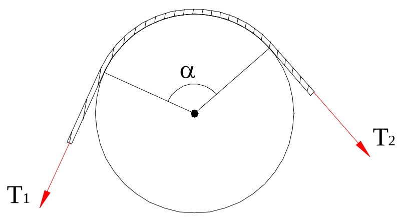
$$a_{\text{máx}} = \frac{g\left(\tan\,\theta + \mu\right)}{1 - \mu\ \tan\,\theta}\,.$$

3.5.3 Fricción en cuerdas



Es bien sabido que si se enrolla una cuerda en un poste es posible soportar una gran tensión T_2 con una pequeña tensión T_1 en el otro extremo. El fenómeno ha sido usado desde tiempos inmemoriales por los marineros para amarrar sus botes. Esta interacción entre una cuerda rugosa o una correa y una superficie circular es la que se presenta en todas las poleas en máquinas y motores.

Consideremos una cuerda enrollada un ángulo α alrededor de un cilindro fijo.

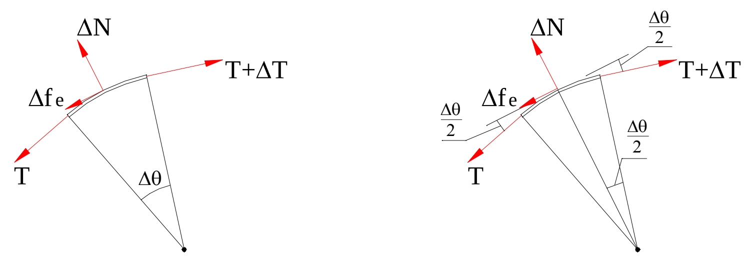


Dada la tensión T_1, queremos hallar cuál es la máxima tensión T_2 que puede ejercerse para que la cuerda no deslice respecto al cilindro.

Tomemos como sistema mecánico un pequeño trozo de cuerda de ángulo $\Delta\theta$, trozo que está en equilibrio y a punto de deslizar, es decir, la fuerza de fricción estática hecha por el cilindro sobre la cuerda tiene su valor máximo

$$\Delta f = \mu_e \, \Delta N ,$$

con μ_e coeficiente estático de fricción entre la cuerda y el cilindro. La tensión es una función del ángulo θ, de modo que las tensiones en los extremos son T y $T + \Delta T$.



Tomando, en el punto central de la cuerda, una dirección n, normal al círculo y hacia el centro, y una dirección t, tangente al círculo, y planteando las condiciones de equilibrio del trozo de cuerda, tendremos:

Dirección t : $$(T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - T \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e \, \Delta N = 0$$

Dirección n : $$T \, \text{sen} \frac{\Delta\theta}{2} + (T + \Delta T) \, \text{sen} \frac{\Delta\theta}{2} - \Delta N = 0$$

Despejando ΔN, remplazando y organizando, tenemos

$$\frac{\Delta T}{\Delta\theta} \left(\cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_e \, \text{sen} \frac{\Delta\theta}{2} \right) = \mu_e \, T \left(\frac{\text{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} \right)$$

En el límite, cuando $\Delta\theta \to 0$, $\cos \frac{\Delta\theta}{2} \to 1$, $\text{sen} \frac{\Delta\theta}{2} \to 0$,

$$\frac{\text{sen} \dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}} \to 1, \qquad \frac{\Delta T}{\Delta\theta} \to \frac{dT}{d\theta} ,$$ y así

$$\frac{dT}{d\theta} = \mu_e \, T .$$

Separando las variables T y θ para integrar y con los límites $T(0) = T_1$, $T(\alpha) = T_2$, tendremos

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \mu_e \int_0^{\alpha} d\theta \quad ,$$

o sea,

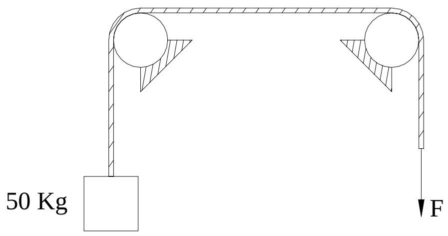
$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_e \, \alpha \ ,$$

y por tanto

$$T_2 = T_1 \, e^{\mu_e \alpha} \ .$$

El ángulo α debe estar expresado en radianes. Si la cuerda da, por ejemplo, dos vueltas completas, $\alpha = 4\pi$ radianes, con un coeficiente $\mu_e = 0.3$, $T_2 = 43\ T_1$, lo que explica el hecho al que aludíamos al comienzo.

15. EJERCICIO

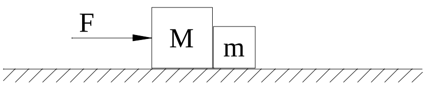


Una cuerda pasa por dos cilindros fijos como se muestra. Si el coeficiente estático de fricción con el cilindro de la izquierda es 0.4 y con el otro 0.3, ¿cuál es la mínima fuerza F necesaria para sostener la caja de 50 kg? Exprese su resultado tanto en N como en kgf.

16.7 kgf

PROBLEMAS.

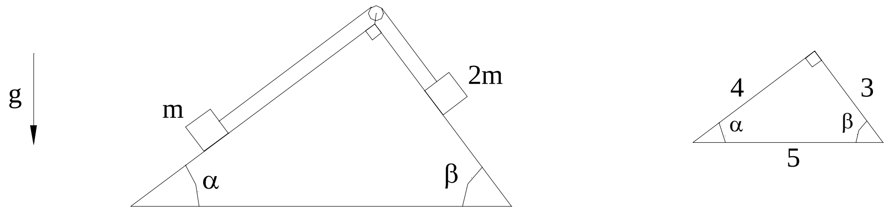
1.



Dos bloques de masas M y m $(M > m)$ reposan sobre una mesa horizontal lisa. Si se empuja con una fuerza horizontal F, hallar la aceleración y la fuerza de contacto entre los bloques. Si ahora la fuerza F se aplica sobre el bloque m y hacia la izquierda, ¿la fuerza de contacto entre los bloques será mayor o menor?

Mayor

2.



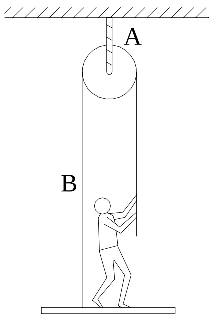
Bloques de masas m y 2m. Polea ideal. Planos inclinados lisos. Hallar las aceleraciones de los bloques y la tensión de la cuerda.

g/3, (14 / 15)mg

3. Desde la base de un plano inclinado 45º, se lanza hacia arriba un bloque con una cierta velocidad inicial. Sube hasta un punto y regresa al punto inicial. Si el tiempo de bajada es el doble del tiempo de subida, hallar el coeficiente dinámico de fricción entre el bloque y el plano.

$$\mu = \frac{3}{5}$$

4.



Un hombre de 70 kg se eleva a sí mismo, junto con la plataforma de 10 kg en la que está parado, mediante el arreglo de cuerda y polea ideales mostrado, con una aceleración de 1 m s^{-2}.

Realice los diagramas de fuerzas de los siguientes sistemas: la polea, la plataforma (no tenga en cuenta los efectos de rotación que pueda tener), el hombre y el sistema conjunto hombre-plataforma.

Halle las tensiones en las cuerdas A y B y la fuerza de contacto entre el hombre y la plataforma.

$T_B = 432$ N

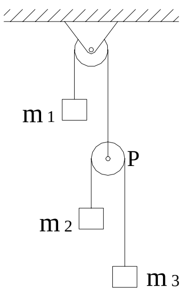
5. Una cuerda de 10 kg de masa está suspendida verticalmente de un gancho que resiste hasta 600 N sin romperse. ¿Cuál es la mínima aceleración con la que debe deslizarse un hombre de 60 kg por la cuerda para que el gancho no se rompa?

$$a_{mín} = 1.43 \ ms^{-2}$$

6. A un pequeño bloque se le da una velocidad inicial v_o medida a lo largo del suelo de un ascensor que se mueve con una aceleración a hacia abajo. Debido al rozamiento, el bloque se mueve una distancia s_1, medida a lo largo del suelo del ascensor, y se detiene. Se repite el experimento con la misma velocidad inicial relativa al suelo, cuando el ascensor tiene una aceleración hacia arriba de igual valor a, y el bloque se desliza una distancia más corta s_2. Muestre que el valor de las aceleraciones del ascensor es

$$a = g \frac{(s_1 - s_2)}{s_1 + s_2} .$$

7.



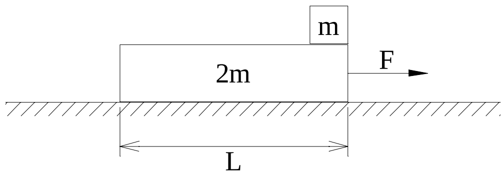
Poleas ideales.

a) Plantear las condiciones de ligadura y las ecuaciones de movimiento para m_1, m_2, m_3 y P. ¿Es un problema con cuántas y cuáles incógnitas?

b) Si $m_1 = 4$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$ (unidades SI), calcular las aceleraciones respecto al marco inercial de esas tres masas en términos de g. Calcular además las aceleraciones relativas de m_2 y m_3 respecto a P (centro de la polea móvil). Chequeo: tienen que ser iguales en magnitud y de sentido contrario.

$$a_1 = g/5$$
$$a_2 = -3g/5$$
$$a_3 = g/5$$

8. Un bloque de masa m está colocado encima de una plataforma de masa 2m, la cual puede deslizar sin fricción sobre un piso horizontal. El coeficiente de fricción, tanto estático como dinámico, entre el bloque y la plataforma es $\frac{1}{3}$.



a) Hallar la máxima fuerza F que puede actuar sobre la plataforma para que el bloque no deslice respecto a ella.

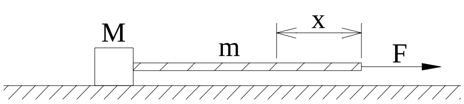
b) Si la fuerza sobre la plataforma es ahora el doble de esa máxima, hallar las aceleraciones del bloque y la plataforma respecto al marco inercial.

c) Si parten del reposo y la plataforma mide L, ¿al cuánto tiempo se caerá el bloque de la plataforma?

b) $g/3, \; 5g/6$

c) $2\sqrt{\frac{L}{g}}$

9. Una cuerda uniforme de masa m y longitud ℓ se ata a un bloque de masa M que se encuentra sobre un piso horizontal liso, y se jala del otro extremo con una fuerza F.

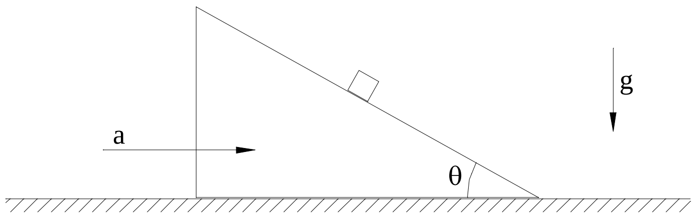


Halle la tensión a una distancia *x* del extremo de la cuerda. No tenga en cuenta el efecto del peso de la cuerda.

Sugerencia: sistema conjunto y luego trozo de cuerda.

$$T = F\left(1 - \frac{m}{(M+m)} \frac{x}{\ell}\right)$$

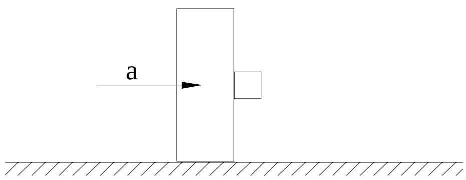
10.



La cuña se mueve con aceleración a por un piso horizontal. El coeficiente estático de fricción entre el bloque y la cuña es μ. Suponga que $\tan\theta > \mu$, de modo que si la cuña estuviese en reposo, el bloque deslizaría por ella. Encuentre la mínima aceleración que debe dársele a la cuña para que el bloque no se deslice.

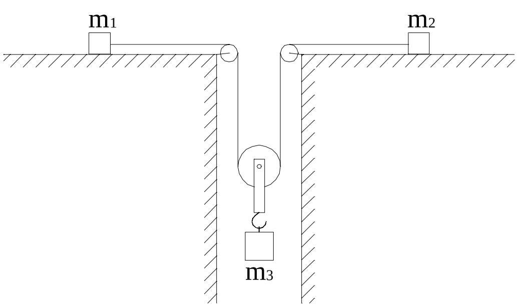
$$a_{\text{mín}} = \frac{g\left(\tan\theta - \mu\right)}{1 + \mu\tan\theta}$$

Estudie de manera independiente la aceleración mínima que debe dársele al bloque grande para que el bloque pequeño no se deslice, en la siguiente situación:



y compruebe que corresponde al caso límite de la cuña cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$.

11.



Asuma que m_1 y m_2 están deslizando con coeficiente dinámico de fricción μ y que cuerda y poleas son ideales.

a) Elija con claridad orígenes y ejes para los movimientos de m_1, m_2 y m_3. (m_3 desciende solidariamente con el eje de la polea móvil, de modo que pueden ser tratados como un solo cuerpo de masa m_3). Plantee la condición de ligadura y las ecuaciones de movimiento.

b) Halle la tensión T en la cuerda.

$$T = \frac{g\left(1+\mu\right)}{\frac{2}{m_3} + \frac{1}{2\,m_1} + \frac{1}{2\,m_2}}$$

12. En un experimento fácil de realizar y probablemente bien conocido, se coloca un bloque sobre una hoja de papel que a su vez se encuentra sobre una mesa horizontal. Si se jala con gran rapidez toda la hoja, el bloque se mueve un poco pero alcanza a quedar sobre la mesa sin caerse de ella. Si los coeficientes dinámicos de fricción entre el bloque y el papel y entre el bloque y la mesa son iguales a μ y el bloque se encuentra al inicio a una distancia d del borde de la mesa, ¿cuál es el máximo tiempo de que se dispone para sacar la hoja de papel sin que el bloque se caiga de la mesa? Aplique para $\mu = 0.5$ y $d = 0.10\ m$.

Sugerencia: El movimiento del bloque tiene dos partes. Mientras está en contacto con el papel la fricción dinámica con éste lo acelera. Cuando pasa todo el papel, la fricción dinámica con la mesa frena el bloque.

$$\text{tiempo} \leq 2\sqrt{\frac{d}{\mu\,g}}\,.$$