TRANSLACIÓN PARALELA DE LOS EJES.

CONTENIDO:

En todos los temas tratados en relación con la ***línea recta***, y los que veremos con respecto a la ***circunferencia***, ***parábola***, ***elipse*** e ***hipérbola***, se considerada el sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, con tendencia a simplificar las ecuaciones, particularmente las curvas ***cónicas***, se opta por trazar un nuevo sistema rectangular determinado, si cambiamos los ejes de las coordenadas que nos permita trabajar con las ecuaciones mas simples.

Este cambio es la ***translación paralela de los ejes***, el cual es el desplazamiento de uno o ambos ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, de tal manera que el origen quede en una nueva posición pero permaneciendo cada eje ***paralelo*** a los ejes originales.

1. ECUACIONES DE *TRANSLACIÓN*.

El conocimiento de las formulas de ***translación*** nos ayudan a simplificar muchos problemas de la ***geometría analítica***.

Usaremos la ***Figura 1*** para ver como se pueden ***trasladar*** las ecuaciones de las curvas de un sistema cartesiano **x** o **y**, hasta ocupar una posición **x´** ó **y´** de ejes ***paralelos*** a los primeros.

Designamos el nuevo origen por **0’(h, k)**, referidos al sistema de coordenadas **x**, **y**, por el punto **0´** trazamos rectas ***paralelas*** al eje **x** y al eje **y**, las que tomaremos como los nuevos ejes **x´** y **y´**. Todo punto **P(x, y)** en el sistema original tendrá **P´(x´, y´)** referidos al nuevo sistema de ejes.

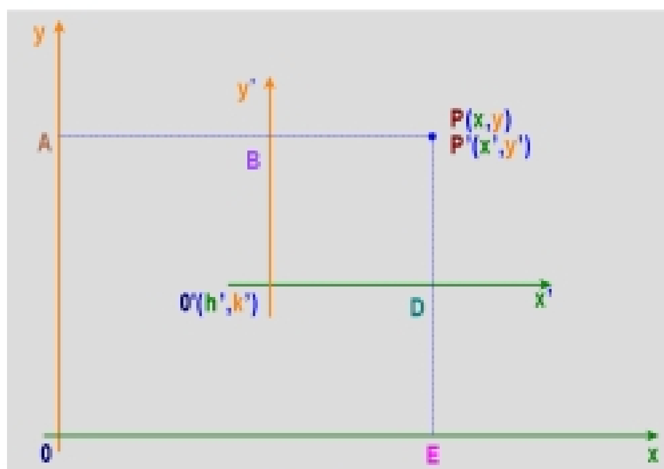

Figura 1

Según la figura:

$$\overline{AP} = \mathbf{x} \quad , \quad \overline{EP} = \mathbf{y}$$

Que son las ***coordenadas originales*** del punto **P(x, y)**

Así mismo, tenemos:

$$\overline{BP} = \mathbf{x'} \quad , \quad \overline{DP} = \mathbf{y'}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTRE MIRILLO
EDITOR PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Que son las ***nuevas coordenadas*** del punto **P´(x´, y´)**.

De la figura también se deduce que:

$$\overline{AP} = \overline{BP} + \overline{AB} = \mathbf{x' + h}$$
$$\overline{EP} = \overline{DP} + \overline{AB} = \mathbf{y' + k}$$

Sustituyendo tenemos que:

x = x´+ h ....**(1)**

y = y´ + k ....**(2)**

O también:

x´ = x - h ....**(3)**

y´ = y - k ....**(4)**

Que son las ecuaciones de ***translación***, mediante las cuales se puede hacer una ***translación paralela*** de los ejes de coordenadas. Su conocimiento nos ayuda a simplificar muchos problemas de la ***geometría analítica***, y se emplearan en la deducción de algunas formulas en los temas correspondientes a la ***parábola***, ***elipse*** e ***hipérbola***.

2. EJERCICIOS.

1. Tomando como ***origen*** el punto **0´(-1, 2)**, y siendo los nuevos ejes paralelos a los anteriores, **encuéntrese** la ***ecuación transformada*** de la curva dada por la ecuación $\mathbf{x^2 + 2x - y + 3 = 0}$.

SOLUCIÓN

Del enunciado, se tiene que: **h = - 1** y **k = + 2**

En este caso las ecuaciones de ***translación*** son:

$$\mathbf{x = x' - 1}$$
$$\mathbf{y = y' + 2}$$

Que se sustituyen en la ecuación dada, es decir:

$$(x'-1)^2 + 2(x'-1) - (y'+2) + 3 = 0$$

Desarrollando:

$$x'^2 - x' + 1 + 2x' - 2 - y' - 2 + 3 = 0$$

Simplificando términos semejantes:

$\mathbf{x'^2 = y'}$

Que es la ***ecuación transformada*** de la curva.

2. La ecuación de una curva referida a un sistema de coordenadas **xy**, es: $\mathbf{x^2 - 10x - 4y + 9 = 0}$. **Encontrar** la ecuación referida a un nuevo sistema de ejes **x´y´** con el ***origen*** en **0´(5, - 4).**

SOLUCIÓN

Según el enunciado se observa que **h = + 5** y **k = - 4**, por tanto:

Las ecuaciones **(1)** y **(2)** quedan:

$$\mathbf{x = x' + 5}$$
$$\mathbf{y = y' - 4}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación dada, se tiene:

$$(x'+5)^2 - 10(x'+5) - 4(y'-4) + 9 = 0$$

Desarrollando:

$$x'^2 + 10x + 25 - 10x' - 50 - 4y' + 16 + 9 = 0$$

Simplificando:

$$x'^2 - 4y' = 0$$

Despejando:

$$\mathbf{x'^2 = 4y'}$$

Esta ultima ***ecuación***, que es mas simple que la original, es la ***ecuación*** de la misma curva referida al nuevo sistema de coordenadas **x´y´**.

3. Mediante una transformación paralela de los ejes, **determinar** el ***centro*** de la ***circunferencia*** cuya ecuación es: $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0}$.

SOLUCIÓN

Aplicando las ecuaciones **(1)** y ***(2)*** de ***translación***, en las que suponemos que **h** y **k**, coordenadas del nuevo origen, son al mismo tiempo las coordenadas del ***centro*** de la ***circunferencia***.

Por tal razón sustituyendo las ecuaciones **(1)** y **(2)** en la ecuación dada se tiene:

$$(x'+h)^2 + (y'+k)^2 - 2(x'+h) - 6(y'+k) - 6 = 0$$

Desarrollando y factorizando:

$$x'^2+2hx'+h^2+y'^2+2ky'+k^2-2x'-2h-6y'-6k-6=0$$
$$x'^2+y'^2+(2h-2)x'+(2k-6)y'+(h^2+k^2-2h-6k-6)=0$$

De esta ecuación deben ***desaparecer*** los términos de primer grado, para lo cual se requiere que los coeficientes respectivos sean ***nulos***, es decir:

$2h-2=0$ Por tanto: **h = 1**

$2k-6=0$ Por tanto: **k = 3**

De lo anterior, se tiene que el ***centro*** es:

$\mathbf{C(1,3)}$

4. **Determinar** la ***translación*** que elimina los términos en **x** y **y** en la ecuación:

$\mathbf{4x^2+16x+9y^2+18y-119=0}$. **Encontrar** la ecuación resultante de esta ***translación***.

SOLUCIÓN

Completando los trinomios cuadrados perfectos, tenemos:

$$4(x^2+4x+4-4)+9(y^2+2y+1-1)=119$$
$$4(x+2)^2-16+9(y+1)^2-9=119$$
$$4(x+2)^2+9(y+1)^2=144$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre **144** y simplificando:

$$\frac{4\,(x+2)^2}{144}+\frac{9\,(y+1)^2}{144}=\frac{144}{144}$$
$$\frac{(x+2)^2}{36}-\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

De tal forma que **h = - 2** y **k = - 1**. Según las ecuaciones **(3)** y **(4)** tendremos que:

$\mathbf{x'=x+2}$ y $\mathbf{y'=y+1}$

Por lo que nos queda la ecuación referida al nuevo sistema en la siguiente forma:

$$\mathbf{\frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{16}=1}$$

Otra forma de solución:

Aplicando $\mathbf{x=x'+h}$ y $\mathbf{y=y'+k}$. Sustituyendo en la ecuación dada tendremos:

$$4(x'+h)^2+16(x'+h)+9(y'+k)^2+18(y'+k)-119=0$$

Desarrollando:

$$4x'^2+8hx'+4h^2+16x'+16h+9y'^2+18ky'+9k^2+18y'+18k-119=0$$

Factorizando:

$$4x'^2+9y'^2+(8h+16)x'+(18k+18)y'+4h^2+9k^2+16h+18k-119=0$$

Como se desea eliminar los términos **x´** y **y´** sus coeficientes deben ser ***cero***, es decir:

$8h+16=0$ Por tanto: **h = -2**

$18k+18=0$ Por tanto: **k = -1**

Por lo que: $\mathbf{x=x'-2}$ y $\mathbf{y=y'-1}$. Si estos valores se sustituyen en la ecuación original obtenemos también:

$$\frac{x'^2}{36}+\frac{y'^2}{16}=1$$