GIRO DE LOS EJES

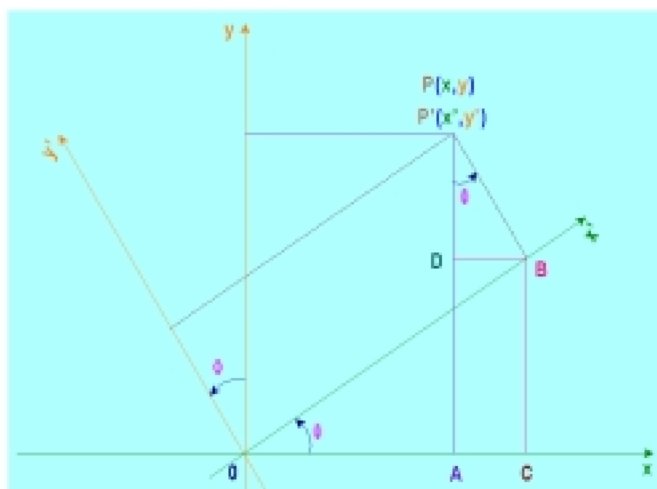
CONTENIDO

Ya tratamos el procedimiento, mediante el cual, con una ***translación paralela de ejes***, simplificamos las ecuaciones en particular de las curvas cónicas.

Ahora simplificaremos, presentando un proceso llamado ***giro de los ejes de coordenadas***, mediante el cual transformaremos la ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en otra que carece del término **Bxy**, que siempre está cuando los ejes focales de la ***parábola***, ***elipse hipérbola*** están inclinados respecto a los ejes de coordenadas.

Cuando en un sistema de coordenadas rectangulares **xy** consideramos un nuevo par de ejes **x'y'** con el mismo origen, y referimos un punto del primer sistema coordenado al segundo, efectuamos un ***giro de ejes***.

También en el ***giro de ejes*** existe una relación entre las coordenadas de un punto ***(x, y)*** y las coordenadas del mismo punto ***(x', y')*** referido al nuevo sistema de ejes coordenados; con el objeto de obtener dicha relación, llamaremos Φ a la magnitud del ángulo medido en sentido positivo desde la parte positiva del eje **x**, hasta la parte positiva del nuevo eje **x'**, como se muestra en la ***figura*** adjunta.



Según la ***figura***, considerando el punto ***P(x, y)***, **0x** y **0y** son los ejes originales, en tanto **0x'** y **0y'** son los nuevos ejes, después de haber girado un ángulo Φ alrededor del origen.

$$\overline{0A} = x \; ; \; \overline{AP} = y$$

Que son las coordenadas primitivas de ***P(x, y)***.

Y que $\overline{0B} = x' \; ; \; \overline{BP} = y'$, que son las nuevas coordenadas del mismo punto ***P***.

1. Ecuaciones de giro.

De la figura anterior se observa que: $\overline{0A} = \overline{0C} - \overline{AC}$; pero como $\overline{AC} = \overline{BD}$, queda que:

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

$\overline{0A} = \overline{0C} - \overline{BD}$ .... **(1)**

De la misma manera; se observa que: $\overline{AP} = \overline{AD} + \overline{DP}$; pero como $\overline{AD} = \overline{BC}$, queda que:

$\overline{AP} = \overline{BC} + \overline{DP}$ .... **(2)**

Ahora en el triángulo rectángulo **0BC** de la figura se tiene por definición trigonométrica que:

$\cos\Phi = \dfrac{\overline{0C}}{\overline{0B}}$. Por tanto depejando a : $\mathbf{\overline{0C} = \overline{0B}\cos\Phi}$ .... **(3)**

$\operatorname{sen}\Phi = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{0B}}$. Por tanto despejando a : $\mathbf{\overline{BC} = \overline{0B}\operatorname{sen}\Phi}$ .... **(3')**

Por otra parte en el triángulo rectángulo **BDP**, de la misma figura se tiene también que:

$\operatorname{sen}\Phi = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BP}}$. Por tanto despejando a : $\mathbf{\overline{BD} = \overline{BP}\operatorname{sen}\Phi}$ .... **(4)**

$\cos\Phi = \dfrac{\overline{DP}}{\overline{BP}}$. Por tanto despejando a : $\mathbf{\overline{DP} = \overline{BP}\cos\Phi}$ .... **(4')**

Sustituyendo **(3)** y **(4)** en **(1)** y **(2)**, respectivamente tenemos:

$\overline{0A} = \overline{0B}\cos\Phi - \overline{BP}\operatorname{sen}\Phi$

$\overline{AP} = \overline{0B}\operatorname{sen}\Phi + \overline{BP}\cos\Phi$

Pero según la figura:

$\overline{0A} = x$; $\overline{0B} = x'$

$\overline{AP} = y$; $\overline{BP} = y'$

Por lo que al sustituir en las expresiones anteriores quedan como:

$\mathbf{x = x'\cos\Phi - y'\operatorname{sen}\Phi}$ .... **(I)**

$\mathbf{y = x'\operatorname{sen}\Phi + y'\cos\Phi}$ .... **(II)**

Que son las ecuaciones de ***giro de los ejes***, aplicables para cualquier posición del punto ***P*** y cualquier valor de Φ.

Veremos la aplicación de estas dos formulas que se usan para simplificar ecuaciones mediante un ***giro de ejes***, o para encontrar las coordenadas de un punto, pasando de un sistema de coordenadas a otro en que los ejes hayan sido girados en determinado ángulo.

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

2. Ejercicios

1. Haciendo girar los ejes un ángulo de **45°**, **probar** que la ecuación $x^2 + x\,y + y^2 = 1$, representa una ***elipse***.

SOLUCIÓN

Las ecuaciones de giro, **(I)** y **(II)** son, sabiendo que $\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

Sustituyendo quedan:

$$x = x'\cos 45° - y'\operatorname{sen} 45° = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$
$$y = x'\operatorname{sen} 45° + y'\cos 45° = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}} = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Las sustituimos en la ecuación dada:

$$\frac{(x' - y')^2}{2} + \frac{(x' - y')(x' + y')}{2} + \frac{(x' + y')^2}{2} = 1$$

Desarrollando y quitando denominadores:

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 + x'^2 - y'^2 + x'^2 + 2x'y' + y'^2 = 2$$

Simplificando términos semejantes:

$$3x'^2 + y'^2 = 2$$

La ecuación representa a una ***elipse***.

2. La ecuación de una cónica es: $4x^2 + 4xy + y^2 + 20x - 40y = 0$. **Aplicar** una rotación apropiada de los ejes para que en esta ecuación ***desaparezca*** el término rectangular **Bxy**.

SOLUCIÓN

Aplicamos las ecuaciones de ***giro***:

$$x = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi$$
$$y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi$$

Que las sustituimos en la ecuación dada:

$$4(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)^2 + 4(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi) +$$
$$+ (x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi)^2 + 20(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi) - 40(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi) = 0$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

Desarrollando:

$$4x'^2\cos^2\varphi - 8x'y'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 4y'^2\operatorname{sen}^2\varphi + 4x'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 4x'y'\cos^2\varphi - 4y'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - 4x'y'\operatorname{sen}^2\varphi +$$
$$+x'^2\operatorname{sen}^2\varphi + 2x'y'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + y'^2\cos^2\varphi + 20x'\cos\varphi - 20y'\operatorname{sen}\varphi - 40x'\operatorname{sen}\varphi - 40y'\cos\varphi = 0$$

Factorizando:

$$(4\cos^2\varphi + 4\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)\,x'^2 + (4\cos^2\varphi - 4\operatorname{sen}^2\varphi - 6\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\,x'y' +$$
$$+(4\operatorname{sen}^2\varphi - 4\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,y'^2 + (20\cos\varphi - 40\operatorname{sen}\varphi)\,x' - (20\operatorname{sen}\varphi + 40\cos\varphi)\,y' = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Para que de esta ecuación ***desaparezca*** el ***término rectangular***, debe ser ***nulo*** el coeficiente respectivo. O sea que:

Igualando a ***cero*** tenemos:

$$4\cos^2\varphi - 4\operatorname{sen}^2\varphi - 6\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0$$

Factorizando:

$$4(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) - 3(2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{(2)}$$

Pero se sabe por conocimientos de trigonometría que:

$$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = \cos 2\varphi$$

Y que:

$$2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \operatorname{sen} 2\varphi$$

Sustituyendo en **(2)** estas expresiones:

$$4\cos 2\varphi - 3\operatorname{sen} 2\varphi = 0$$
$$4\cos 2\varphi = 3\operatorname{sen} 2\varphi$$

Rearreglando la ecuación tenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{4}{3} = \tan 2\varphi$$

Pero se sabe que:

$$\tan 2\varphi = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}$$

O sea sustituyendo el valor de ***tan 2φ***:

$$\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{4}{3}$$

Simplificando:

$$\frac{\tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi} = \frac{2}{3}$$

Rearreglando la ecuación y efectuando las operaciones:

$$3 \tan \varphi = 2 - 2 \tan^2 \varphi$$
$$2 \tan^2 \varphi + 3 \tan \varphi - 2 = 0$$

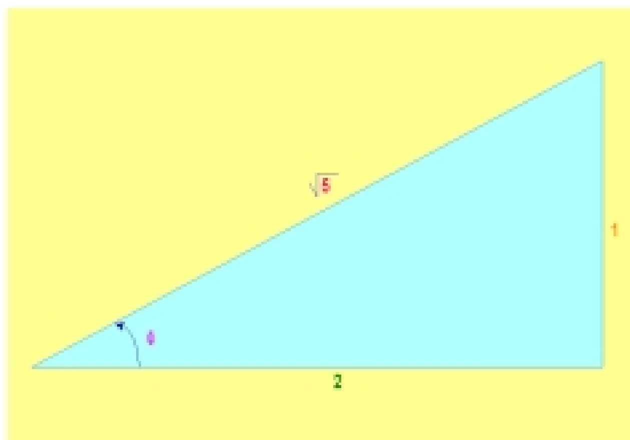
Resolviendo la ecuación de segundo grado anterior para ***tan φ***, se obtiene:

$$\tan \ \varphi = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$
$$\tan \ \varphi = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}$$

Sabemos que por definición

$$\tan \varphi = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{1}{2}$$

Con esto se obtiene según el triangulo rectángulo adjunto:



Y por el teorema de ***Pitágoras***, la hipotenusa es $\sqrt{5}$. Por lo que:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \ ; \ \cos \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

La ecuación reducida se obtiene sustituyendo estos valores en la ecuación **(1)**:

$$\left(\frac{16}{5} + \frac{8}{5} + \frac{1}{5} \right) x'^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5} \right) y'^2 + \left(8\sqrt{5} - 8\sqrt{5} \right) x' - \left(4\sqrt{5} + 16\sqrt{5} \right) y' = 0$$

Simplificando:

$$5 \ x'^2 - 20 \ \sqrt{5} \ y' = 0$$

Despejando:

$$\mathbf{x'^2 = 4\sqrt{5} \ y'}$$

La ecuación representa a una ***parábola***.

3. **Hallar** el ***ángulo de rotación*** de ejes necesario para ***eliminar*** el término **Bxy** de la

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

ecuación: $7x^2 - 6\sqrt{3}\ xy + 13y^2 = 16$

SOLUCIÓN

Sustituyendo en la ecuación dada las ecuaciones de ***giro***:

$$x = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi$$
$$y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi$$

Obtenemos:

$$7(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)^2 - 6\sqrt{3}\,(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi)$$
$$+13(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi)^2 = 16$$

Desarrollando:

$$(7x'^2\cos^2\varphi - 14x'y'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 7y'^2\operatorname{sen}^2\varphi) -$$
$$-6\sqrt{3}\,x'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + x'y'\cos^2\varphi - x'y'\operatorname{sen}^2\varphi - y'^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)$$
$$+13x'^2\operatorname{sen}^2\varphi + 26x'y'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 13y'^2\cos^2\varphi = 16$$

Simplificando y factorizando.

$$(7\cos^2\varphi - 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 13\operatorname{sen}^2\varphi)\,x'^2 +$$
$$\left[12\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - 6\sqrt{3}\left(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}'^2\varphi\right)\right]x'y' +$$
$$(7\operatorname{sen}^2\varphi + 6\sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 13\cos^2\varphi)\,y'^2 = 16 \quad \text{..(1)}$$

Igualando a ***cero*** el coeficiente de **x´y´** para eliminarlo.

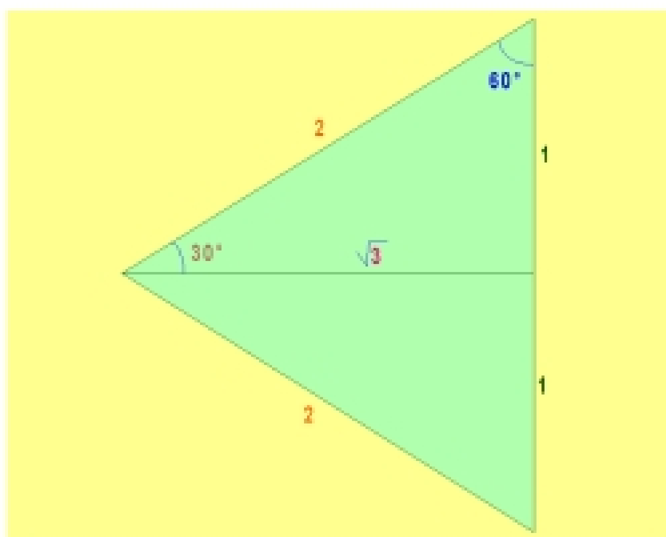
$$6(2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) - 6\sqrt{3}\,(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) = 0$$

Pero se sabe que:

$$2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = \operatorname{sen}2\varphi$$

Y que:

$$\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = \cos 2\varphi$$



Sustituyendo queda:

$$6\operatorname{sen}2\varphi - 6\sqrt{3}\cos 2\varphi = 0$$
$$6\operatorname{sen}2\varphi = 6\sqrt{3}\cos 2\varphi$$
$$\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}$$

Es decir que: $\tan 2\varphi = \sqrt{3}$

Y apoyándonos en el triangulo anterior:

$$\tan\ 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Luego: $2\varphi = 60^0 \quad \therefore \quad \boldsymbol{\varphi = \frac{60^0}{2} = 30^0}$

Por tanto:

$$\text{sen}\, 30^0 = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sustituyendo estos valores, la ecuación **(1)** se reduce:

$$\left[7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 13\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]x'^2 + \left[7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 13\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]y'^2 = 16$$

Haciendo operaciones:

$$\left(\frac{21}{4} - \frac{18}{4} + \frac{13}{4}\right)x'^2 + \left(\frac{7}{4} + \frac{18}{4} + \frac{39}{4}\right)y'^2 = 16$$

$$\frac{16}{4}x'^2 + \frac{64}{4}y'^2 = 16$$

$$4\,x'^2 + 16\,y'^2 = 16$$

$$\mathbf{x'^2 + 4y'^2 = 4}$$

La ecuación representa a una ***elipse***

Nombre de archivo:	giro de los ejes	
Directorio:	C:\Geometria_analitica	
Plantilla:	C:\WINDOWS\Application Data\Microsoft\Plantillas\Normal.dot	
Título:	GIRO DE LOS EJES	
Asunto:		
Autor:	Pablo Fuentes Ramos	
Palabras clave:		
Comentarios:		
Fecha de creación:	08/04/02 11:58 A.M.	
Cambio número:	24	
Guardado el:	05/06/02 01:35 P.M.	
Guardado por:	Pablo Fuentes Ramos	
Tiempo de edición:	556 minutos	
Impreso el:	05/06/02 06:24 P.M.	
Última impresión completa		
	Número de páginas:	7
	Número de palabras:	837 (aprox.)
	Número de caracteres:	4,775 (aprox.)