ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

CONTENIDO

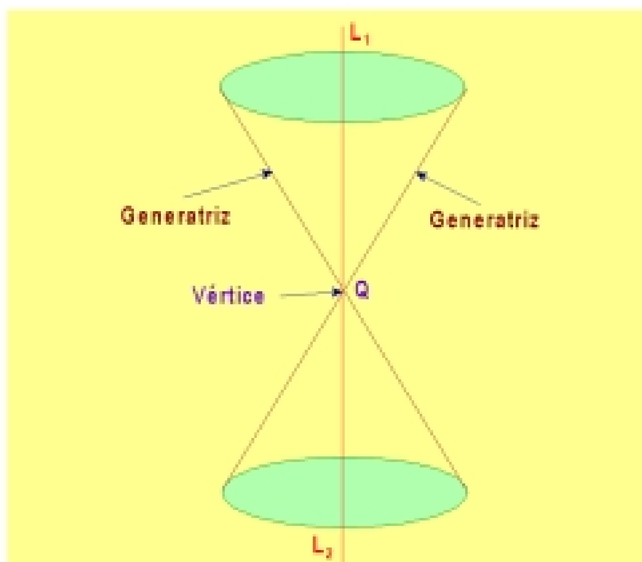
1. Definición de cónica y cono de revolución

CÓNICA

Se llama ***cónica*** al conjunto de puntos que forman la intersección de un plano con un ***cono*** de revolución de dos mantos.

CONO DE REVOLUCIÓN DE DOS MANTOS

Cono de revolución de dos mantos es la superficie formada por todas las rectas que pasan por un punto **Q** de una línea recta **L_1 L_2** y forman un ángulo con dicha recta, como se ve en la ***figura*** adjunta.



La recta **L_1** y **L_2** es el eje del ***cono***.

El punto **Q** es su ***vértice***.

Las rectas que pasan por **Q** son las que generan o forman el ***cono***.

2. Determinación de las cónicas por medio de sus coeficientes

La ecuación representativa de las ***cónicas*** en una de sus formas es:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{.......... (1)}$$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

En donde los coeficientes **A**, **C**, **D**, **E**, y **F**, son números reales que determinan el tipo de curva correspondiente que, en caso de existir, tendremos la ***línea recta***, la ***circunferencia***, la ***parábola***, la ***elipse*** o una ***hipérbola***.

En otros casos la curva, puede presentarse como una ***recta*** o un ***par de rectas***, también puede ser un ***punto*** o el ***conjunto vacío***.

2.1. Determinación del tipo de curva considerando los coeficientes, A y C

Tomando en consideración la forma de la ecuación **(1)**, se nos presentan los siguientes casos.

PRIMERO

Si los coeficientes **A** y **C** son ***iguales*** a ***cero***, es decir:

$$A = C = 0$$

La gráfica es una ***recta***. De acuerdo a la ecuación **(1)** nos queda reducida a la forma:

$$Dx + Ey + F = 0$$

Que nos representa a la ***ecuación general de la línea recta*** , vista anteriormente.

Ejemplos

$$6x - 2 = 0$$
$$4x + 5y + 3 = 0$$

SEGUNDO

Si los coeficientes **A** y **C** son ***diferentes*** a ***cero***; es decir $A \neq 0$ y $C \neq 0$

Y se cumple que:

$$A = C \neq 0$$

La gráfica será una ***circunferencia***, un ***punto*** o el ***conjunto vacío***.

Ejemplos

$$6x^2 + 6y^2 = 36$$
$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 24 = 0$$

TERCERO

También puede presentarse que uno de los coeficientes de las variables al cuadrado sea ***igual*** a ***cero***, por lo que la gráfica de la curva será una ***parábola***, una ***línea recta***, ***dos líneas rectas*** o un ***conjunto vacío***.

Ejemplos

$x^2 - 4y = 0$
$y^2 - 4x + 8 = 0$
$x^2 + 12y - 24 = 0$

CUARTO

Si se cumple que el producto de los coeficientes **A** y **C** es un resultado ***mayor que cero***, la gráfica representara a una ***elipse***, un ***punto*** o un ***conjunto vacío***.

Es decir que:

$(A)(C) > 0$

Ejemplos

$5x^2 + 3y^2 + 15 = 0$
$3x^2 + 2y^2 - 24x + 6y = -60$

QUINTO

Cuando el producto de los coeficientes **A** y **C** es un resultado ***menor que cero***, la gráfica es una ***hipérbola*** o ***dos líneas rectas*** que se ***intersectan***.

Ejemplos

$x^2 - y^2 = 8$
$5x^2 - 4y^2 + 2x - 1 = 0$

2.2. Determinación del tipo de curva, considerando el termino *Bxy*

En los temas correspondientes a la posición general de la ***parábola***, ***elipse*** e ***hipérbola***, se vio la ecuación general de segundo grado cuya forma general es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{.........} (2)$$

Se estudió en dichos temas y hemos dicho, que los coeficientes de los términos de segundo grado son los que definen a la curva correspondiente dada una ecuación y que el término **Bxy** aparece solamente cuando la curva tienen sus ejes inclinados con respecto a los ejes cartesianos.

La ***elipse***, la ***parábola*** y la ***hipérbola*** reciben el nombre general de ***curvas de segundo grado***, porque, como ya vimos, cada una de ellas está representada por una ecuación de segundo grado. También es muy común llamarlas ***cónicas***, porque resultan de un cono de revolución al ser cortado por un plano, ya sea oblicuamente a la base, perpendicularmente a ella o paralelamente a la generatriz.

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

2.3. Discriminante de la ecuación.

A partir de la ecuación general: $A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$, podemos saber de qué ***cónica*** se trata recurriendo al binomio $B^2 - 4\,A\,C$, llamado ***discriminante*** de la ecuación, el cual se representa con la letra **D** de donde:

$$\mathbf{D = B^2 - 4AC}$$

Por lo cual tenemos los casos siguientes:

Si $\mathbf{D = B^2 - 4AC < 0}$, se trata de una **ELIPSE**

Si $\mathbf{D = B^2 - 4AC = 0}$, se trata de una **PARÁBOLA**

Si $\mathbf{D = B^2 - 4AC > 0}$, se trata de una **HIPÉRBOLA**

Es decir: Si el valor del ***discriminante*** de una ecuación es ***negativo***, ***cero*** o ***positivo*** nos indica que la ecuación corresponde a una ***elipse***, a una ***parábola*** o a una ***hipérbola*** respectivamente.

3. Ejercicios

1. **Determinar** qué tipo de curva representa la ecuación $\mathbf{3x^2 + 4y^2 + 36x - 24y + 36 = 0}$.

SOLUCIÓN

Según la forma general de la ecuación **(2)** de segundo grado los coeficientes son: **A = 3**, **B = 0** y **C = 4**; sustituyendo estos valores, el ***discriminante*** queda:

$$\mathbf{B^2 - 4AC = 0 - 4\,(\,3\,)\,4 = -12\,(\,4) = -48 < 0}$$

Es decir que

$$\mathbf{D < 0}$$

De acuerdo con el resultado la ecuación dada representa una ***elipse***.

2. **Identificar** la curva correspondiente a la ecuación $\mathbf{7x^2 - 14xy + 7y^2 + 5x - 23y + 34 = 0}$.

SOLUCIÓN

Los coeficientes son:

A = 7, B = - 14 y C = 7

Calculamos el ***discriminante***:

$$\mathbf{B^2 - 4AC = (\,-14\,)^2 - 4\,(7\,)\,7 = 196 - 198 = 112 = 0}$$

Como: **D = 0**

La ecuación dada corresponde a una ***parábola***.

3. **Determinar** a que tipo de curva corresponde la ecuación $\mathbf{x^2 - xy - 3x + 2y + 4 = 0}$.

SOLUCIÓN

Los coeficientes en este caso son:

A = 1; B = - 1 y C = 0

Calculando el ***discriminante***:

$\mathbf{B^2 - 4AC = (-1)^2 - 4(1)(0) = 1 - 0 = 1 > 0}$

Como**: D > 0**

La ecuación representa a una ***hipérbola***.

4. **Hallar** la naturaleza de la curva representada por la ecuación $\mathbf{4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0}$.

SOLUCIÓN

De la ecuación tenemos que:

A = 4, B = -4 y C = 1

Sustituyendo según el ***discriminante***:

$\mathbf{D = B^2 - 4AC = (4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0}$

D = 0

Por el resultado puede ser una ***parábola***.

Pero agrupando los términos, la ecuación dada se puede descomponer en factores, como veremos enseguida:

$\mathbf{(4x^2 - 4xy + y^2) - 3(2x - y) + 2 = 0}$

$\mathbf{(2x - y)^2 - 3(2x - y) + 2 = 0}$

Resolviendo la ecuación de segundo grado por el método de factorizacion:

$\mathbf{(2x - y)(2x - y) - (2x - y) - 2(2x - y) + 2 = 0}$

Factorizando por agrupación:

$\mathbf{(2x - y)[(2x - y) - 1] - 2[(2x - y) - 1] = 0}$

$\mathbf{(2x - y - 1)(2x - y - 2) = 0}$

AUTOR: PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO
EDICIÓN PARA INTERNET: PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS

El resultado nos demuestra que son ***dos rectas paralelas***:

$2x - y - 1 = 0$ y $2x - y - 1 = 0$

AUTOR: **PROFESOR JESÚS INFANTE MURILLO**
EDICIÓN PARA INTERNET: **PROFESOR PABLO FUENTES RAMOS**