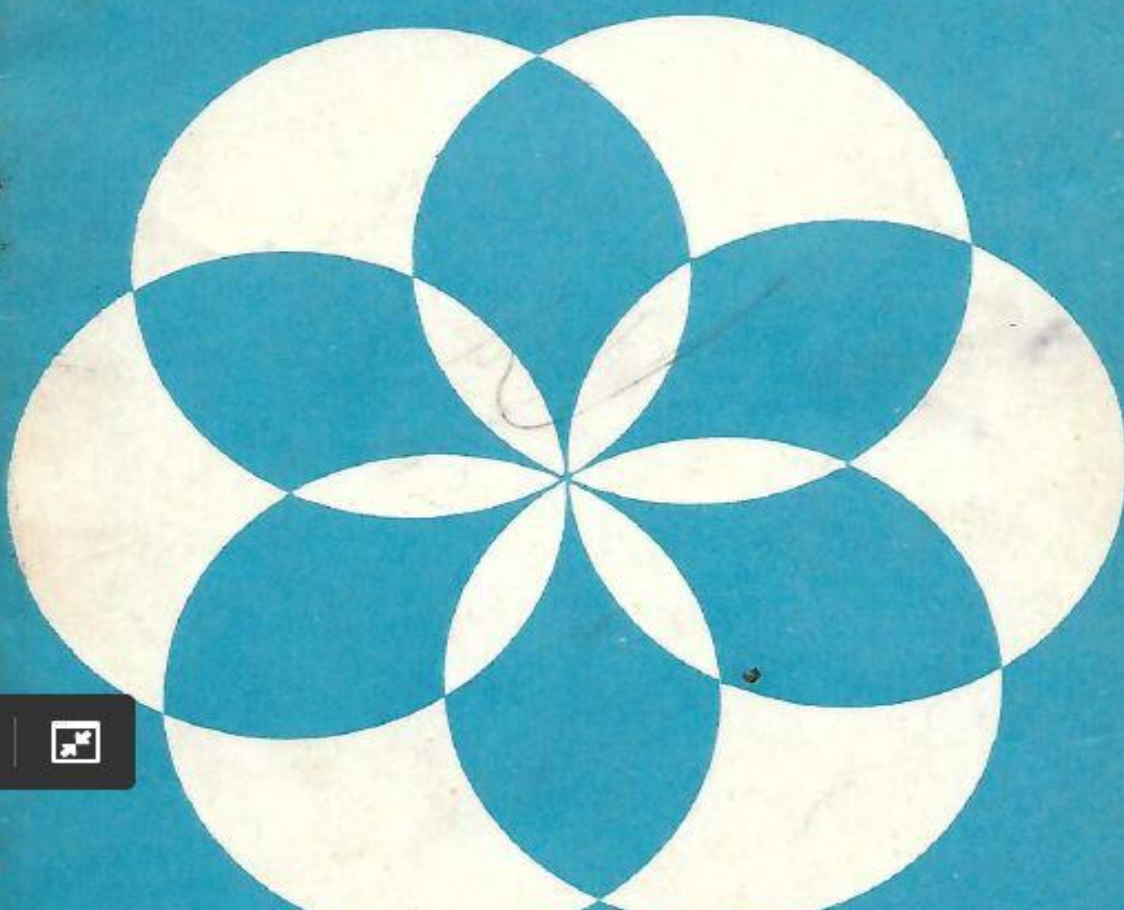
Funciones y Relaciones
Parte 1

ANUIES

LUZ MARIA RANGEL



1. PAREJAS ORDENADAS

Ejemplo 1. Supóngase que en la cafetería de la escuela el desayuno consiste en un platillo que puede ser cereal, sandwich, huevos o carne y una bebida que puede ser leche, café o refresco.

La orden se hace por número, de acuerdo con la siguiente clave: El número 1 corresponde a cereal, el número 2 corresponde a sandwich, el número 3 corresponde a huevos y el número 4 a carne. Para las bebidas, el número 1 indica leche, el número 2 café y el número 3 refresco. Si llamamos P al conjunto de los platillos y B al conjunto de las bebidas, entonces:

$$B = \{1, 2, 3\}$$
$$P = \{1, 2, 3, 4\}$$

Seleccionando un elemento de cada conjunto obtenemos parejas de elementos que indican qué platillo y qué bebida se han seleccionado. Así, 2 y 1 indican sandwich y leche, 4 y 3 corresponden a carne y refresco, 1 y 2 indican cereal y café, etc. En total son doce desayunos diferentes.

Obsérvese que en estos pares de números el orden de los elementos es importante. En cada par el platillo ocupa el primer lugar y la bebida el segundo. Estas parejas se llaman *parejas ordenadas* porque tienen dos elementos, uno de ellos ocupa el primer lugar en la pareja ordenada y el otro al segundo.

Las parejas ordenadas se representan encerrando sus elementos entre paréntesis. Así, las parejas ordenadas que indican el desayuno seleccionado se representan:

$$(1, 2),\ (1, 3),\ (2, 1),\ (4, 2),\ \text{etc.}$$

La pareja $(3, 1)$, que indica huevos y leche, es diferente de la pareja $(1, 3)$, que corresponde a cereal y refresco; la pareja $(2, 3)$, que indica sandwich y refresco, es diferente de la pareja $(3, 2)$, que representa huevos y café, etc. En general, la pareja ordenada

$$(a, b) \neq (b, a) \text{ y}$$
$$(a, b) = (b, a) \text{ si, y sólo si } a = b$$

Ejercicios 1.1

1) En un salón de clases hay cinco filas numeradas del 1 al 5, cada fila tiene diez asientos numerados del 1 al 10. Escriba las parejas ordenadas (fila, asiento) para las filas impares y asientos pares.
2) Un comerciante vende zapatos a $200 el par. Escriba las parejas ordenadas que indican el número de zapatos vendidos y lo que el comerciante recibe, cuando sus ventas han sido de 2, 5, 3 y 0 pares de zapatos por día.
3) El Sr. Martínez pidió prestado $900 para pagar $90 mensuales. Escriba las parejas ordenadas cuyas componentes son: (número de pago, cantidad que adeuda).
4) Encuentre las parejas ordenadas en las que a cada entero positivo menor que 7 se le asocia el residuo que se obtiene al dividirlo por 2.

1.1 Producto cartesiano

Definición: El conjunto que tiene como elementos a las parejas ordenadas que se pueden formar eligiendo como primera componente a los elementos del conjunto P y como segunda componente a los elementos del conjunto B se le llama Conjunto Producto o *Producto Cartesiano*

de P y B; se representa $P \times B$ y se lee "P cruz B". Entonces

$$P \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

Es decir:

$$P \times B = \{(x, y) \mid x \in P,\ y \in B\}$$

Una forma de expresar gráficamente el producto cartesiano consiste en utilizar diagramas de Venn representando los conjuntos con sus elementos y relacionando las parejas con líneas, como se indica en la Fig. 1.1.

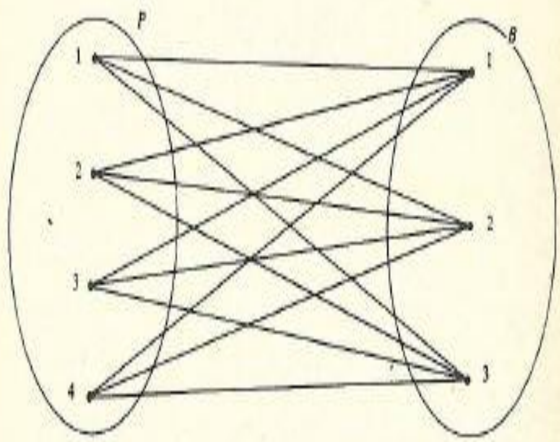


Fig. 1.1

Si un conjunto D tiene 5 elementos y otro conjunto E tiene 7, su producto cartesiano $D \times E$ estará formado por 35 parejas ordenadas; si un conjunto C tiene 8 elementos, el producto cartesiano $C \times C$ tendrá 64 parejas ordenadas, en general, si dos conjuntos A y B tienen m y n elementos respectivamente, su producto cartesiano tendrá $m\,n$ parejas ordenadas. Sólo cuando A y B tengan pocos elementos, es conveniente expresar su producto cartesiano escribiendo las parejas ordenadas que lo forman, de otro modo no resulta práctico por la extensión que requiere y conviene expresarlo por medio de su definición.

Ejemplo 2. Encuentre el producto cartesiano $A \times \phi$ donde A es cualquier conjunto no vacío.

Solución: Por definición

$$A \times \phi = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in \phi\}$$

Recuérdese que el conjunto ϕ, conjunto vacío, no tiene elementos. Al formar las parejas del producto cartesiano no existen elementos que sean la segunda componente y no es posible obtener parejas ordenadas.

Otra forma de observar esto es como sigue:

Como el número de elementos de ϕ es $n(\phi) = 0$, si A es cualquier conjunto, supongamos que $n(A) = m$, entonces:

$$n(A \times \phi) = n(A) \cdot n(\phi) = m \cdot 0 = 0$$

Por lo tanto, el producto cartesiano $A \times \phi$ es el conjunto vacío.

El producto cartesiano de dos conjuntos diferentes A y B no vacíos no es conmutativo, ya que las parejas ordenadas (a, b), $a \in A$, $b \in B$ de $A \times B$ son diferentes de las parejas ordenadas (b, a) de $B \times A$ porque tienen sus elementos intercambiados, es decir, si A y B son dos conjuntos no vacíos y $A \neq B$, entonces:

$$A \times B \neq B \times A \quad \text{o}$$
$$A \times B = B \times A \quad \text{si, y sólo si} \quad A = B$$

1.2 Ejes coordenados

Recordemos que es posible representar los números reales como los puntos de una recta y, recíprocamente, a cada punto de la recta hacerle corresponder un número real. A esta recta se le llama *recta numérica.*

La gráfica del producto cartesiano de dos conjuntos utilizando diagramas de Venn, se vuelve confusa aun cuando los conjuntos que intervienen tengan pocos elementos. En su lugar resulta conveniente utilizar un sistema de

dos rectas perpendiculares llamadas *ejes coordenados,* a lo largo de los cuales se representan los elementos de los conjuntos.

Para el ejemplo 1 de los desayunos, representando los elementos de P sobre un eje y los de B en otro, cada pareja ordenada se representa en la intersección de las rectas paralelas a los ejes en el punto donde se localiza el elemento, como se muestra en la Fig. 1.2, y los puntos marcados representan a las parejas del producto cartesiano $P \times B$.

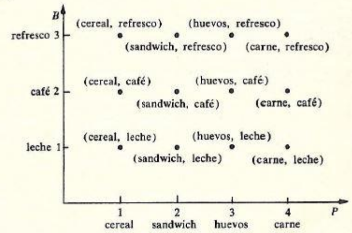


Fig. 1.2

Si los conjuntos son numéricos, el punto donde se intersectan las rectas es el punto que representa al número 0 de los dos ejes y corresponde al origen del sistema. La longitud unitaria que se determina en uno de los ejes se reproduce, dividida en 1, 2, 3, . . . , n partes iguales, a lo largo de ambos.

Se llama semieje positivo al conjunto de puntos del eje que están a la derecha del origen y semieje negativo al conjunto de puntos a la izquierda del origen.

A los elementos que ocupan el primer lugar en la pareja ordenada se les llama *abscisas* y al eje donde se representan se le llama *eje de las abscisas*; a los elementos que ocupan el segundo lugar en la pareja se les llama *ordenadas* y al eje donde se representan *eje de las ordenadas.*

Al trazar los ejes el plano queda dividido en cuatro regiones llamadas *cuadrantes,* ordenados como se muestra en la Fig. 1.3. Según el signo de la abscisa y de la ordenada, el punto que representa a la pareja estará localizado en alguno de los cuadrantes. Por ejemplo, el punto de coordenadas $(1, 1)$ está localizado en el primer cuadrante, mientras que el punto $(6, -2)$ se encuentra en el cuarto cuadrante.

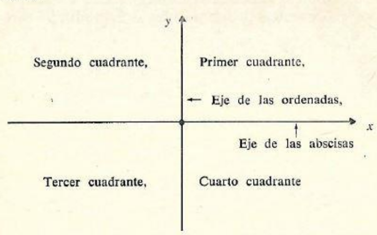


Fig. 1.3

Ejemplo 3. Represente en un sistema de ejes coordenados el producto cartesiano $A \times B$ donde

$$A = \{1, 2, 3\}$$

y

$$B = \{0, -1, 3\}$$

Solución: El producto cartesiano $A \times B$ es igual a

$$A \times B = \{(1, 0),\ (1, -1),\ (1, 3),\ (2, 0),\ (2, -1),\ (2, 3),\ (3, 0),\ (3, -1),\ (3, 3)\}$$

y para representarlo gráficamente debemos localizar los puntos del plano, cuyas coordenadas son las parejas ordenadas de $A \times B$ (Fig. 1.4).

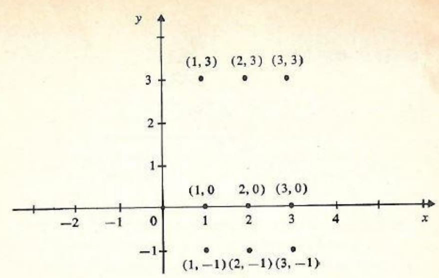


Fig. 1.4

Ejemplo 4. Sea

$$A = \{1, 2, -3\}$$

Encuentre el producto cartesiano de $A \times A$ y represéntelo gráficamente en un sistema de ejes coordenados.

Solución: Se desea formar el producto cartesiano de un conjunto con él mismo, entonces, por definición,

$$A \times A = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in A\}$$

es decir, el producto cartesiano $A \times A$ es el conjunto de todas las parejas ordenadas que se pueden formar con la propiedad de que sus dos elementos pertenecen al conjunto A.

Tomando el primer elemento de A, las parejas ordenadas que se pueden formar con él como primer elemento son:

$$(1, 1),\ (1, 2) \ \text{y}\ (1, -3).$$

Con el elemento 2 de A, procediendo de la misma forma, se tienen las parejas

$$(2, 1),\ (2, 2)\ \text{y}\ (2, -3);$$

y con el último elemento de A, -3, las parejas que se obtienen son:

$$(-3, 1),\ (-3, 2)\ \text{y}\ (-3, -3).$$

Entonces:

$$A \times A = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (1, -3),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (2, -3),\ (-3, 1),\ (-3, 2),\ (-3, -3)\}$$

y su gráfica aparece en la Fig. 1.5.

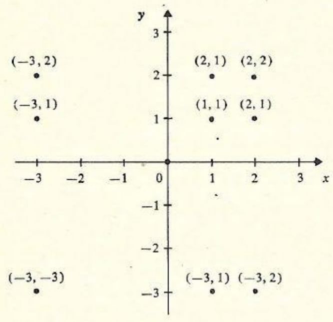


Fig. 1.5

Ejercicios 1.2

1) Encuentre las parejas ordenadas (t, d), donde d es la distancia que recorre un cuerpo en t segundos de caída libre, para los 5 primeros segundos, si se sabe que $d = 4.9\, t^2$.

2) Si una central de teléfonos tiene m aparatos conectados, el número posible de llamadas que puede atender es $m\,(m-1)/2$. Encuentre las parejas ordenadas del número de teléfonos y el número posible de llamadas que puede atender para 3, 4, 5, 6, 7 y 8 teléfonos.

En cada uno de los siguientes ejercicios encuentre el producto cartesiano que se indica y represéntelo gráficamente en un sistema de ejes coordenados.

3) $A \times B$, si $A = \{$matemáticas, física, química$\}$ y $B = \{$trigonometría, electricidad, química orgánica$\}$

4) $S \times T$, si $S = \{x, y, z\}$ y $T = \{x^2, z^2, y^2\}$

5) $A \times B$, si $A = \{-4, -2, 0, 2\}$ y $B = \{-3, -1, 1\}$

6) $C \times C$, si $C = \{0, 1/2, 1\}$

7) $D \times E$, si $D = \{-2, 4\}$ y $E = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$

8) $A \times \mathbf{R}$, si $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 \leq x \leq 6\}$

9) $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, donde $\mathbf{N}$ es el conjunto de los números naturales y $\mathbf{Z}$ el conjunto de los números enteros.

10) $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ y $\mathbf{N}$ son los mismos conjuntos del ejercicio 9.

11) $P \times \mathbf{N}$, si $P = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -1\}$ y $\mathbf{N}$, el conjunto de los números naturales.

12) $B \times T$, si $B = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ y $T = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$

13) $A \times C$, si $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 2\}$ y $C = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 5\}$

1.3 Producto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

Por la definición de producto cartesiano,

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$$

es decir, el producto cartesiano de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, también representado por $\mathbf{R}^2$, es el conjunto de parejas ordenadas de números reales.

Cada elemento de $\mathbf{R}^2$ corresponde a un punto del plano, y cada punto del plano corresponde a una pareja.

Ejemplo 5. Si $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$, y

$$B = \{2\}$$

Encuentre:

a) $A \times B$ y su gráfica.
b) $B \times A$ y su gráfica.

Solución: B es un conjunto con un elemento, mientras que A es el conjunto de los números reales comprendidos desde -1 hasta 3.

Recuérdese que entre dos números reales dados es posible encontrar siempre otro número real, por lo tanto, el conjunto A tiene un número infinito de elementos y no es posible listar las parejas ordenadas que forman $A \times B$ o $B \times A$.

a) $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\}$

Como B tiene sólo un elemento

$$A \times B = \{(x, 2) \mid -1 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbf{R}\}$$

o sea, $A \times B$ es un conjunto con un número infinito de parejas ordenadas cuya primera componente es un número real comprendido desde -1 hasta 3 y cuya segunda componente es siempre igual a 2. Esto determina que su

gráfica esté representada por una línea continua en el plano que va desde -1 hasta 3 y a 2 unidades del origen, medidas sobre el eje y como se muestra en la Fig. 1.6.

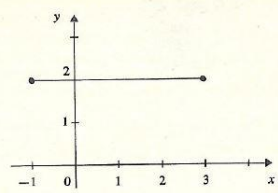


Fig. 1.6

b) $B \times A = \{(x, y) \mid x \in B,\ y \in A\}$ y

$$B \times A = \{(2, y) \mid -1 \leq y \leq 3,\ y \in \mathbf{R}\}$$

El producto cartesiano $B \times A$ también es un conjunto infinito de parejas ordenadas, pero ahora su primera componente es 2 y su segunda componente es cada número real comprendido desde -1 hasta 3.

Gráficamente se representa en el plano por una línea continua que va desde -1 hasta 3 siempre a 2 unidades del origen, medidas sobre el eje x (Fig. 1.7).

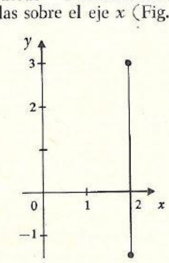


Fig. 1.7

Ejemplo 6. Sea $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ y $B = \{y \in \mathbf{R} \mid -1 \leq y \leq 2\}$

Encuentre $A \times B$ y represéntelo gráficamente.
Solución: A es el conjunto de los números reales desde -2 hasta 3, y B es el conjunto de números reales desde -1 hasta 2. Estos dos conjuntos son infinitos.

$$A \times B = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, x, y \in \mathbf{R}\}$$

y su gráfica es el conjunto de puntos con abscisa desde -2 hasta 3 y ordenada desde -1 hasta 2, como se muestra en la Fig. 1.8.

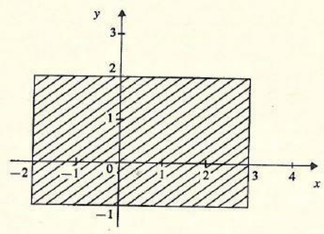


Fig. 1.8

Ejercicios 1.3

1) En un sistema coordenado de ejes marque los siguientes puntos:

$P_1 = (3, 4)$, $P_2 = (-2, -5)$, $P_3 = (-4, 6)$, $P_4 = (5, -7)$, $P_5 = (0, 7)$, $P_6 = (-6, 0)$, $P_7 = (6, 0)$, $P_8 = (0, -4)$.

2) Escriba las condiciones para que un punto (x, y):

a) Pertenezca al primer cuadrante.

b) Pertenezca al segundo cuadrante.
c) Pertenezca al tercer cuadrante.
d) Pertenezca al cuarto cuadrante.

3) a) Si un punto está sobre el eje y, ¿qué valor tiene su abscisa?
b) Si un punto está sobre el eje x, ¿qué valor tiene su ordenada?
c) ¿Cuáles son las coordenadas del origen?

4) Dé las coordenadas de cada punto descrito y localícelos en el plano:

a) Su ordenada es 5 y su abscisa -2.
b) Su ordenada es 3 veces su abscisa y su abscisa es 2.
c) Su abscisa es 3 y su ordenada es 2 unidades menor que su abscisa.
d) Su abscisa es -3 y está sobre el eje x.
e) Su ordenada es 1 y su abscisa es 4 unidades menor que su ordenada.

5) Un cuadrado que mide 3 unidades de lado tiene uno de sus vértices en el origen, otro sobre el semieje positivo de las abscisas y un tercero sobre el semieje positivo de las ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de los cuatro puntos que son vértices del cuadrado? (Sugerencia: grafique las condiciones dadas).

Examen para la sección 1

Instrucciones: seleccione la respuesta correcta

1. Si durante 4 horas se mantiene una velocidad uniforme de 45 km/h, las parejas ordenadas formadas por horas y distancia recorrida son:

a) (1,45), (2,90), (3,135), (4,180)
b) (1,0), (2,45), (3,90), (4,135)

c) (45,1), (90,2), (135,3), (180,4)
d) (0,1), (45,2), (90,3), (135,4)

2. El costo de enviar un telegrama es de \$3 por las primeras 10 palabras y \$0.35 por cada palabra adicional. Las parejas ordenadas que asocian el costo del mensaje a 12, 14, 15, 17 y 19 palabras puestas en el telegrama son:

a) (3.70,12), (4.40,14), (4.75,15), (5.45,17), (6.15,19)
b) (12,3.70), (14,4.40), (15,4.75), (17,5.45), (19,6.15)
c) (3.70,12), (4.05,14), (4.40,15), (4.75,17), (5.10,19)
d) (12,3.70), (14,4.05), (15,4.40), (17,4.75), (19,5.10)

3. Las parejas ordenadas que tienen como primera componente a un número par entre 0 y 8 y como segunda componente a un número primo menor que la primera componente que le corresponde son:

a) (2,1), (4,1), (4,3), (6,1), (6,3), (6,5)
b) (2,1), (2,2), (4,1), (4,2), (4,3), (6,1), (6,2), (6,3), (6,5)
c) (2,2), (4,2), (4,3), (6,2), (6,3), (6,5)
d) (4,2), (4,3), (6,2), (6,3), (6,5)

4. Si $A = \{1, 4, 9\}$ y $B = \{-2, 1\}$, el producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto:

a) $\{(-2,1), (-2,4), (-2,9), (1,1), (1,4), (1,9)\}$
b) $\{(1,-2), (1,1), (4,-2), (4,1), (9,-2), (9,1)\}$
c) $\{(1,-2), (1,1), (4,-2), (1,4), (9,-2), (1,9)\}$
d) $\{(1,-2), (4,-2), (9, -2), (1,1), (1,4), (1,9)\}$

5. Si $C = \{x \in \mathbf{Z} \quad -1 \leq x < 2\}$ y $B = \{0,1\}$, el producto cartesiano $B \times C$ es el conjunto:

a) $\{(0,-1), (1,-1), (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$
b) $\{(0,-1), (1,-1), (0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2)\}$
c) $\{(-1,0), (-1,1), (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
d) $\{(-1,0), (-1,1), (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$

6. El producto cartesiano $A \times B$, si $A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 < x \leq 2\}$ y $B = \{-1\}$ es:

a) $\{(x, -1) \mid -1 \leq x \leq 2\}$
b) $\{(-1, x) \mid -1 \leq x \leq 2\}$
c) $\{(x, -1) \mid -1 < x \leq 2\}$
d) $\{(-1, x) \mid -1 < x \leq 2\}$

7. El producto cartesiano $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ es un subconjunto de:

a) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$
b) $\mathbf{Z}^- \times \mathbf{Z}^+$
c) $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^-$
d) $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

8. Sea $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, el producto cartesiano $A \times B$ es igual al producto cartesiano $B \times A$ si y sólo si B es el conjunto:

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$
b) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -3 < x < 1\}$
c) $\{x \in \mathbf{R} \mid -4 < x < 2\}$
d) $\{x \in \mathbf{Z} \mid -4 < x < 2\}$

9. El producto cartesiano $\mathbf{R}^- \times \mathbf{R}^-$ es el conjunto de todos los puntos del plano coordenado en el:

a) Primer cuadrante.

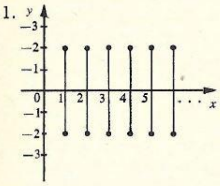
b) Segundo cuadrante.
c) Tercer cuadrante
d) Cuarto cuadrante.

10. La representación geométrica del producto cartesiano $\{0\} \times \mathbf{R}$ es el:

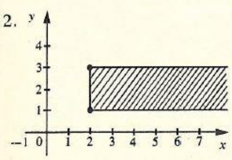
a) Eje de las ordenadas.
b) Eje de las abscisas.
c) Origen.
d) Plano coordenado.

Instrucciones: Relacione cada gráfica de la columna de la izquierda con el producto cartesiano de la columna de la derecha que le corresponde:

11.

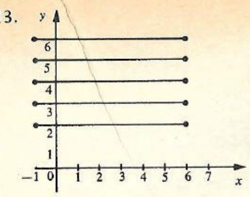


12.

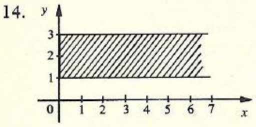


a) $A \times B = \{(x,y) \mid x \geq 2,\ 1 \leq y \leq 3,\ x,\ y \in \mathbf{R}\}$
b) $C \times D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1,\ 1 \leq y \leq 3,\ x,\ y \in \mathbf{R}\}$
c) $E \times F = \{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 2,\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{N}\}$
d) $G \times H = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 6,\ 2 \leq y \leq 6,\ x,\ y \in \mathbf{R}\}$
e) $I \times J = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 6,\ 2 \leq y \leq 6,\ x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{Z}\}$
f) $K \times L = \{(x,y) \mid x \in \mathbf{N},\ -2 \leq y \leq 2,\ y \in \mathbf{R}\}$
g) $M \times N = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ 1 \leq y \leq 3,\ x,\ y \in \mathbf{R}\}$

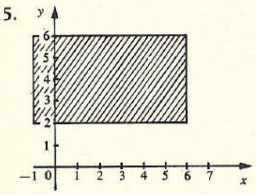
13.



14.



15.



2. RELACIONES

Ejemplo 1. Considere los siguientes conjuntos:

El conjunto A cuyos elementos son 5 nombres de persona y el conjunto B cuyos elementos con 7 apellidos.

$A = \{$Susana, Rosa, Vicente, Augusto, Laura$\}$

$B = \{$Díaz, Contreras, Gil, Estrada, Muñoz, Juárez, Pérez$\}$

El producto cartesiano de $A \times B$ es:

$A \times B = \{$(Susana, Díaz), (Susana, Contreras), . . ., (Susana, Pérez), (Rosa, Díaz), (Rosa, Contreras), . . ., (Rosa, Pérez), . . ., (Laura, Díaz), (Laura, Contreras), . . ., (Laura, Pérez)$\}$

y cada una de las 35 parejas de $A \times B$ forman un nombre propio.

Supóngase que se quieren integrar nombres propios con la característica de que el número de letras del apellido sea igual al número de letras del nombre. Sea R este conjunto, entonces:

$R = \{$(Susana, Juárez), (Rosa, Díaz), (Vicente, Estrada), (Augusto, Estrada), (Laura, Muñoz), (Laura, Pérez)$\}$

Luego, R es un subconjunto de $A \times B$ formado por los elementos del producto cartesiano que cumplen una cierta condición.

Obsérvese que todos los elementos del conjunto A son componentes de alguna de las parejas del conjunto R,

mientras que de los elementos de B sólo aquéllos que cumplen la condición dada son segunda componente de las parejas de R. Al conjunto A se le llama *dominio* de R, y sus elementos se designan por la letra "x", el conjunto B es el *codominio* de R y al conjunto de elementos de B, que son segunda componente de alguna pareja ordenada de R, se le llama *imagen* de R y sus elementos se designan por la letra "y".

Para el ejemplo 1, el conjunto

$C = \{$Juárez, Díaz, Estrada, Muñoz, Pérez$\}$

es la imagen de R y cada uno de sus elementos es la imagen de al menos un elemento del dominio de R.

Así, la imagen de "Susana" es "Juárez", la imagen de "Laura" es "Muñoz" y también es "Pérez", la imagen de "Vicente" es "Estrada", la imagen de "Augusto" es "Estrada" y la imagen de "Rosa" es "Díaz". De modo que cada elemento del dominio al menos tiene una imagen; a "Laura", por ejemplo, le corresponden dos.

Si representamos al dominio con A, al codominio con B y a la imagen con C, se cumplen las siguientes proposiciones:

$$R \subset A \times B \quad \text{y}$$
$$\mathbf{C} \subseteq B$$

donde el conjunto de parejas ordenadas R representa una relación entre los elementos del conjunto A y los elementos del conjunto B. R es una relación de A en B y se simboliza así:

$$R : A \rightarrow B$$

Definición: Sean A y B dos conjuntos. Se llama relación de A en B a un subconjunto R de $A \times B$.

Todos los elementos del dominio de la relación intervienen como primeras componentes de las parejas ordenadas y de los elementos del codominio, algunos, o todos, aparecen como segundas componentes.

2.1 Gráfica de una relación

Una relación también puede representarse gráficamente con diagramas de Venn o en un sistema de ejes coordenados. La gráfica del conjunto R con diagramas se representa en la Fig. 2.1 y la misma relación en un sistema de ejes perpendiculares aparece en la Fig 2.2.

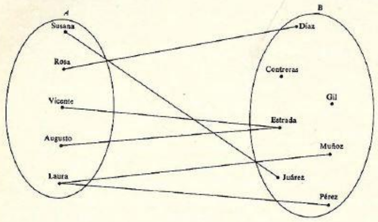


Fig. 2.1

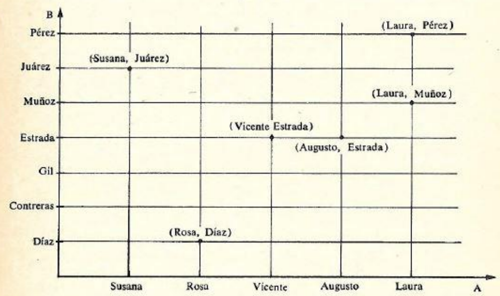


Fig. 2.2

La gráfica de una relación R es el cojunto G de todos los puntos del producto cartesiano representados en el plano con la propiedad de que el punto de coordenadas (x, y) pertenece a la gráfica si, y sólo si la pareja ordenada (x, y) es un elemento de la relación. Es decir, la gráfica de una relación R es el conjunto

$$G = \{ (x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in R \}$$

Una relación puede expresarse listando todos sus elementos o bien, enunciando la propiedad que los caracteriza.

Ejemplo 2. Sea R_1: $A \to B$, donde

$$A = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \}$$
$$B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$$
$$\text{y } R_1 = \{ (-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9) \}$$

Exprese R_1 mencionando la propiedad que cumplen sus elementos.

Solución: Debemos encontrar la regla con que se han formado las parejas de R_1, esto es, el método con que se han asignado las imágenes que forman el conjunto

$$C = \{ 9, 4, 1, 0 \}$$

Si observamos la lista, encontramos que en cada pareja la segunda componente es el cuadrado de la primera:

En $(-3, 9)$, $9 = (-3)^2$
En $(-2, 4)$, $4 = (-2)^2$
En $(0, 0)$, $0 = 0^2$
En $(2, 4)$, $4 = 2^2$, etc.

de manera que a cada elemento x del dominio se le asocia el elemento del codominio que es su cuadrado; cada pareja

que pertenezca a R_1 debe ser de la forma (x, y) donde y sea el cuadrado de x, esto es:

$$R_1 = \{ (x, y) \mid y = x^2, x \in A, y \in B \}$$

Podemos comprobar que esta expresión representa la misma relación tomando cada elemento del dominio A y sustituyéndolo en la proposición

$$y = x^2$$

para obtener su imagen correspondiente como se muestra en la siguiente tabla:

x	$y = x^2$	(x, y)
-3	$(-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$(-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
0	$0^2 = 0$	$(0, 0)$, etc.

Ejemplo 3.

Sea R_2: $A \to B$ donde

$$A = \{ 0, 1, 2, 4 \}$$
$$B = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$
$$\text{y } R_2 = \{ (x, y) \mid y^2 = x, x \in A, y \in B \}$$

Exprese R_2 enumerando sus elementos y represéntela gráficamente.

Solución: Recuérdese que cada elemento del dominio debe ser primer elemento de alguna pareja de R_2 o sea, que cada elemento del conjunto A tiene al menos una imagen en el conjunto B.

De la relación $y^2 = x$, $x \in A$, obtenemos la regla de correspondencia:

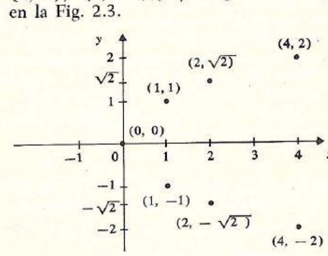
$$y = \pm \sqrt{x}\ , \quad x \in A$$

entonces,

x	$y = \pm \sqrt{x}$	(x, y)
0	$\pm \sqrt{0} = 0$	$(0, 0)$
1	$\pm \sqrt{1} = \pm 1$	$(1, 1)$ y $(1, -1)$
2	$\pm \sqrt{2}$	$(2, \sqrt{2})$ y $(2, -\sqrt{2})$
4	$\pm \sqrt{4} = \pm 2$	$(4, 2)$ y $(4 -2)$

Por lo tanto,

$R_2 = \{ (0, 0), (1, 1), (1, -1), (2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (4, 2), (4, -2), \}$ y su gráfica se representa en la Fig. 2.3.



Gráfica de R_2 Fig. 2.3

Obsérvese que a cada elemento del dominio le corresponden 2 imágenes.

En ocasiones es fácil pasar de una relación expresada por una regla de correspondencia a un conjunto de parejas ordenadas y viceversa; pero estas transformaciones no siempre es posible realizarlas como ocurre cuando la relación es un conjunto infinito o con un número grande de elementos, o en otros casos en que es difícil encontrar la regla de correspondencia. Según la estructura de la relación, será el uso de alguna de las formas que existen para expresarla.

Ejemplo 4. Sea $R_3 : A \to \mathbf{R}$, donde

$A = \{ x \mid -2 \leq x \leq 4 \}$ y

$R_3 = \{ (x, y) \mid y = 1 + x^2, x \in A, y \in \mathbf{R} \}$

Determine la imagen y la gráfica de la relación. (Nótese que el codominio de R_3 se ha especificado ya al decir que la relación va del conjunto A al conjunto $\mathbf{R}$).

Solución: Obsérvese que aplicando la regla de correspondencia $y = 1 + x^2$ para las imágenes no es posible obtener, en forma exhaustiva, el conjunto imagen de la relación, ya que su dominio es el conjunto A de los números reales comprendidos desde -2 hasta 4, que tiene un infinito número de elementos.

En la ecuación $y = 1 + x^2$ el término x^2 representa los cuadrados de los números reales en $[-2, 4]$. Los valores negativos de x en $[-2, 0)$, al elevarse a la segunda potencia, se transforman en números reales desde 0 hasta 4, y los valores positivos de x de $(0, 4]$ se transforman en los reales desde 0 hasta 16, es decir, si $x \in [-2, 4]$, $x^2 \in [0, 16]$. A cada elemento de este conjunto se le suma la unidad para obtener las imágenes:

$$y = 1 + x^2$$

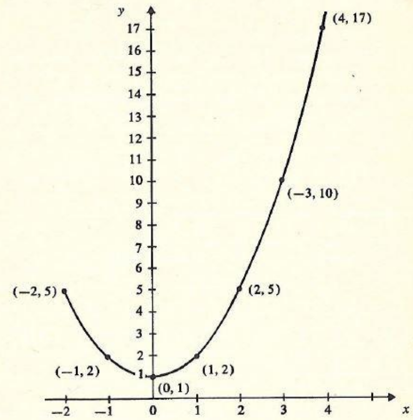
y se obtiene para y el conjunto $[1, 17]$, que es la imagen de $\mathbf{R}_3$. Si llamamos C a esta imagen, entonces

$$C = \{ y \in \mathbf{R} \mid 1 \leq y \leq 17 \}, \quad C \subset \mathbf{R}$$

Algunas parejas ordenadas de R_3 son:

x	$y = 1 + x^2$	(x, y)
-2	$1 + (-2)^2 = 5$	$(-2, 5)$
-1	$1 + (-1)^2 = 2$	$(-1, 2)$
0	$1 + 0^2 = 1$	$(0, 1)$
1	$1 + 1^2 = 2$	$(1, 2)$
2	$1 + 2^2 = 5$	$(2, 5)$
3	$1 + 3^2 = 10$	$(3, 10)$
4	$1 + 4^2 = 17$	$(4, 17)$

Si las representamos en el plano, y siguiendo su posición las unimos con una línea, obtenemos la gráfica de la relación R_3 (Fig. 2.4).



Gráfica de R_3 Fig. 2.4

Ejemplo 5. Sea $R_4 : A \to \mathbf{R}$, donde

$A = \{ x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \}$ y

$R_4 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = 4, \ x \in A, \ y \in \mathbf{R} \}$

Determine la imagen y la gráfica de la relación.

Solución: La regla de correspondencia es

$$x^2 + y^2 = 4, \ x \in A, \ y \in \mathbf{R}$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$y = \pm \sqrt{4 - x^2}, \ x \in A,$$

esto es, a x le asignamos valores del intervalo $[-2, 2]$ dominio de R_4. Igual que en el ejemplo anterior, en la expresión para y aparece x^2; por lo tanto, los números reales desde -2 hasta 2 se transforman en los números reales desde 0 hasta 4, y estos valores han de restarse a 4:

si $x^2 = 0$ $\qquad y = \pm \sqrt{4}$

$\qquad y = \pm 2$

y, si $x^2 = 4$ $\qquad y = \pm \sqrt{0}$

$\qquad y = 0$

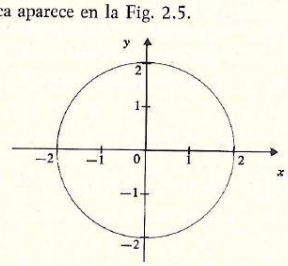
por lo tanto, la imagen de la relación es el conjunto

$$C = \{ y \in \mathbf{R} \mid -2 \leq y \leq 2 \}$$

Algunas parejas de R_4 son:

x	$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$	(x, y)
-2	$\pm \sqrt{4 - 4} = 0$	$(-2, 0)$
-1	$\pm \sqrt{4 - 1} = \pm \sqrt{3}$	$(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$
0	$\pm \sqrt{4 - 0} = \pm 2$	$(0, 2)$; $(0, -2)$
1	$\pm \sqrt{4 - 1} = \pm \sqrt{3}$	$(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$
2	$\pm \sqrt{4 - 4} = 0$	$(2, 0)$

y su gráfica aparece en la Fig. 2.5.



Gráfica de $R_4 : A \to \mathbf{R}$ Fig. 2.5

Ejemplo 6. Considérese la misma relación del ejemplo 5:

$R_4 : A_1 \to \mathbf{R}$, donde

$A_1 = \{ x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \}$

Solución: La relación está dada nuevamente por $x^2 + y^2 = 4$ pero se ha modificado su dominio restringiéndose los números reales desde -1 hasta 1; ya no forman parte de R_4 los puntos cuya abscisa esté en $[-2, -1)$ y $(1, 2]$.

Analicemos nuevamente la expresión $y = \pm \sqrt{4 - x^2}$, $x \in A_1$. Como $x \in [-1, 1]$, $x^2 \in [0, 1]$ de modo que

si $x^2 = 0$, $\quad y = \pm \sqrt{4} \quad = \pm 2$

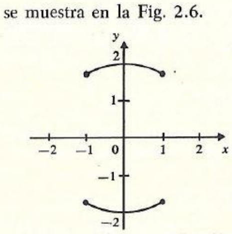
si $x^2 = 1$, $\quad y = \pm \sqrt{4 - 1} = \pm \sqrt{3}$

por lo tanto, la imagen de R_4 ahora es el conjunto

$$C = \{ y \in \mathbf{R} \mid -2 \leq y \leq -\sqrt{3}, \ 2 \leq y \leq \sqrt{3} \}$$

x	$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$	(x, y)
-1	$\pm \sqrt{4 - 1} = \pm \sqrt{3}$	$(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$
0	$\pm \sqrt{4 - 0} = \pm 2$	$(0, 2)$, $(0, -2)$
1	$\pm \sqrt{4 - 1} = \pm \sqrt{3}$	$(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$

y su gráfica se muestra en la Fig. 2.6.



Gráfica de $R_4 : A_1 \to B$ Fig. 2.6

Ejercicios 2.1

1) Sea $R : A \to A$, donde $A = \{$ Sr. José Trejo, Sra. Gil de Trejo, Ricardo Trejo Gil, Luisa Trejo Gil, Arturo Trejo Gil $\}$. Encuentre, listando sus elementos, las siguientes relaciones:

a) Es hijo o hija de. . .
b) Es hija de. . .
c) Es madre de. . .
d) Es hermana de. . .
e) Es padre de. . .
f) Es hermano o hermana de. . .

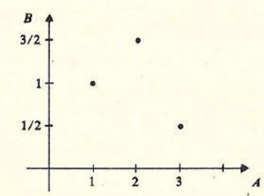
2) Encuentre tres parejas ordenadas que pertenezcan a la relación "nació antes que" definida de A en A, donde $A = \{$ Cristóbal Colón, P. Elías Calles, Benito Juárez $\}$

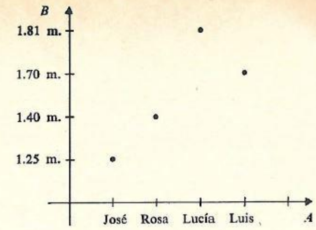
3) Encuentre una frase que domine la siguiente relación:

$R = \{$ (L. Cárdenas, República Mexicana), (J. F. Kennedy, Estados Unidos de N. A.), (J. D. Perón, Argentina) $\}$

4) Encuentre, listando sus elementos, la relación que aparece en la gráfica y determine su dominio e imagen:

a)





Para cada relación dé una fórmula que exprese su regla de correspondencia y encuentre su dominio, su imagen y su gráfica.

5) $R_1 = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)\}$

6) $R_2 = \{(4, 2), (8, 4), (12, 6), (16, 8)\}$

7) $R_3 = \{(4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$

8) $R_4 = \{(2, 4), (-2, 4), (3, 9), (-3, 9)\}$

9) $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (-1, 1), (-2, 2)\}$

Para cada relación escriba el conjunto de las parejas ordenadas que la forman y encuentre su dominio e imagen.

10) La suma de dos enteros no negativos es 8.

11) Asocie con cada número natural menor que 10, que sea cuadrado perfecto, sus dos raices cuadradas.

12) Asocie con cada número entero desde -4 hasta 3 el doble de su valor absoluto.
Si $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, encuentre el conjunto R

y su gráfica para cada uno de los siguientes ejercicios:

13) $R : A \to A, R = \{(x, y) \mid y = x\}$

14) $R : A \to A, R = \{(x, y) \mid y < x\}$

15) $R : A \to \mathbf{R}, R = \{(x, y) \mid x = 1, -1 \leq y \leq 2\}$

16) $R : A \to \mathbf{R}, R = \{(x, y) \mid 4 \leq x \leq 6, y = -3\}$

17) $R : A \to \mathbf{R}, R = \{(x, y) \mid y < x + 1, x < 5\}$

Encuentre la imagen y trace la gráfica de la relación definida por:

18) $R : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = x^2 - x$

19) $R : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, y = x^2 - |x|$

20) $R : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, x + y < 2$

Examen para la sección 2

Instrucciones: Seleccione la respuesta correcta:

1. Si $B = \{(-2,0), (9,-5), (1/2,-2), (2/9, -1/3)\}$ entonces B es una relación en:

a) $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$
b) $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$
c) $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$
d) $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

2. El dominio de la relación $\{(-\pi, \pi), (-\pi, -\pi), (\pi, \pi), (\pi, -\pi)\}$ es el conjunto:

a) $\{-\pi\}$
b) $\{\pi\}$
c) $\{-\pi, \pi\}$
d) $\mathbf{R}$

3. La imagen de la relación $\{(1,1), (1/2, 1/2), (1/3, 1/4), (1/4, 1/8), (1/5, 1/16)\}$, es el conjunto:

a) $\mathbf{R}^+$
b) $\mathbf{Q}$
c) $\mathbf{R}$
d) $\{x \mid x = 1/2^n, n \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$

4. El conjunto de las parejas ordenadas de la relación $R = \{(x,y) \mid x = 1/n, y = 1/2^{n-1}, n \in \mathbf{N}\}$ es:

a) $\{(1, 1/2), (1/2, 1/4), (1/3, 1/8), (1/4, 1/16)\}$
b) $\{(1, 1), (1/2, 1/2), (1/3, 1/4), (1/4, 1/8)\}$
c) $\{(1, 1), (1/2, 1/2), (1/3, 1/4), (1/4, 1/8), \ldots\}$
d) $\{(1, 1/2), (1/2, 1/4), (1/3, 1/8), (1/4, 1/16), \ldots\}$

5. El dominio de la relación definida por $y^2 = x$ es el conjunto:

a) $\mathbf{R}$
b) $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
c) $\mathbf{R}^+$
d) $\mathbf{R}^-$

6. La imagen de la relación definida por $y^2 = x$ es el conjunto:

a) $\mathbf{R}^-$
b) $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
c) $\mathbf{R}^+$
d) $\mathbf{R}$

7. El dominio de la relación definida por $x^2 + y^2 = 16$ es el conjunto:

a) $[-4, 4]$
b) $[-16, 16]$
c) $\mathbf{R}$
d) $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

8. La relación que asocia a cada número entero el residuo que se obtiene al dividirlo entre 2, es:

a) $y = x/2,\ x \in \mathbf{Z}$

b) $y = \begin{cases} 0 \text{ si } x \text{ es par,} \\ 1 \text{ si } x \text{ es impar,} \end{cases} \ x \in \mathbf{Z}$

c) $y = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ es par,} \\ 0 \text{ si } x \text{ es impar,} \end{cases} \ x \in \mathbf{Z}$

d) $y = x/2,\ x \in \mathbf{R}$

9. La relación que asocia a cada entero no negativo su cuadrado, está definida por:

a) $y = x^2,\ x \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$
b) $y^2 = x,\ x \in \mathbf{Z}^- \cup \{0\}$
c) $y = x^2,\ x \in \mathbf{Z}^+$
d) $y^2 = x,\ x \in \mathbf{Z}^-$

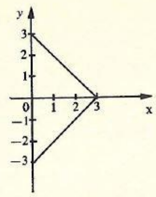
10. La relación cuyo dominio es el conjunto:

$A = \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ e imagen el conjunto $B = \{y \in \mathbf{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$ es:

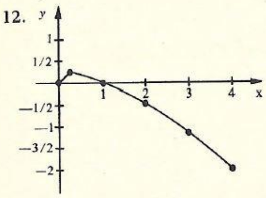
a) $y = \sqrt{1-x^2}$
b) $y = -\sqrt{1-x^2}$
c) $y = 1-x^2$
d) $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Instrucciones: Relacione cada gráfica de la columna de la izquierda con la relación de la columna de la derecha que le corresponda

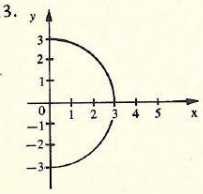
11.



12.



13.



a) $y = x^2 - 2x,$
$-3 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbf{R}$

b) $y = \sqrt{x} - x,$
$x \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$

c) $y = \pm\sqrt{9 - x^2},$
$-3 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbf{R}$

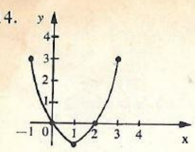
d) $y = \pm\sqrt{x^2 + 4},$
$x \geq 0,\ x \in \mathbf{R}$

e) $x^2 + y^2 = 9,$
$0 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbf{R}$

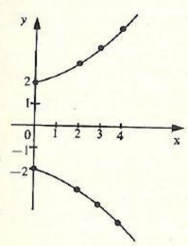
f) $y = \pm\ |x - 3|,$
$0 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbf{R}$

g) $y = -x^2 + x,$
$-3 \leq x \leq 3,\ x \in \mathbf{R}$

14.



15.



3. FUNCIONES

Ejemplo 1. Sean dos conjuntos, A y B, donde A es el conjunto de números enteros de 0 hasta 10, con los que representaremos calificaciones, y B el conjunto de símbolos que en algunas instituciones se utilizan para dar el resultado del rendimiento escolar al alumno.

Entonces,

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \text{ y}$$
$$B = \{NA, S, B, MB\}$$

El producto cartesiano $A \times B$ es el conjunto

$$A \times B = \{(0, NA), (1, NA), \ldots, (10, NA), (0, S), (1, S), \ldots, (10, S), (0, B), (1, B), \ldots, (10, B), (0, MB), (1, MB), \ldots, (10, MB)\}$$

y consta de 40 parejas ordenadas donde el primer elemento de la pareja pertenece al conjunto A y el segundo elemento al conjunto B. Sabemos que el símbolo NA indica "no acreditada" la materia, es decir, que en la escala numérica su calificación fue 0, 1, 2, 3, 4, o 5; S indica que el resultado fue 6 o 7, "suficiente" para acreditar la materia; B corresponde a un resultado de 8 o 9 en calificación, considerado "bueno"; y con MB se simboliza un resultado "muy bueno" correspondiente a 10 de calificación.

Utilizando diagramas de Venn podemos representar a los dos conjuntos con sus elementos e indicar con líneas la relación que existe entre ellos, como se muestra en la Fig. 3.1.

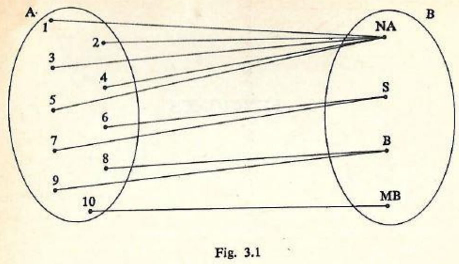


Fig. 3.1

Tomando un elemento de cada conjunto, de acuerdo con la relación dada, se obtiene un conjunto de parejas ordenadas en $A \times B$ que cumplen con cierta condición: representar con un número o con un símbolo el mismo resultado del rendimiento escolar de un alumno.

Llamemos D a este conjunto, entonces

$$D = \{(0, NA), (1, NA), (2, NA), (3, NA), (4, NA), (5, NA), (6, S), (7, S), (8, B), (9, B), (10, MB)\}$$

Obsérvese que a cada elemento del conjunto A le corresponde sólo un elemento del conjunto B, esto es, no hay en D dos parejas ordenadas que tengan su primera componente igual. Esto mismo ocurre en los ejemplos 2 y 4 de la sección 2, no así con los demás ejemplos de la misma sección, en los que para cada pareja hay otra con la misma primera componente.

A un conjunto de parejas ordenadas como D, donde se cumple que a cada elemento del conjunto A le corresponde únicamente un elemento del conjunto B, se le da el nombre de *función* y es este un concepto de gran importancia dentro de las matemáticas.

Al elemento $y \in B$ asociado con algún $x \in A$, por la regla de corespondencia f, se le llama imagen del elemento x bajo la función f y se simboliza $f(x)$ y se lee "f de x".

Si una pareja ordenada (x, y) pertenece a una función f, se dice que el elemento "y" es el valor de la función f en "x", y se representa:

$$y = f(x)$$

El concepto de función se define de la siguiente manera:

Definición: Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es un conjunto f de parejas ordenadas de $A \times B$ con la propiedad de que cada elemento de A es primera componente de una pareja ordenada, y para todo $a \in A$, si (a, b) y (a, c) pertenecen a f, entonces $b = c$.

El conjunto A de los elementos que son primeras componentes en las parejas ordenadas de una función se llama *dominio* de la función, el conjunto B se llama *codominio* y al conjunto de elementos de B, que son segunda componente en las parejas ordenadas de la función, se le llama *imagen del dominio de la función.*

Considerando nuevamente el ejemplo 1, como el conjunto D es una función llamémosla f_1, entonces

$$f_1 = \{(0, NA), (1, NA), (2, NA), (3, NA), (4, NA), (5, NA), (6, S), (7, S), (8, B), (9, B), (10, MB)\},$$

su dominio es el conjunto

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

su codominio el conjunto

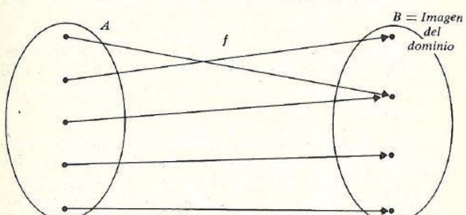
$$B = \{NA, S, B, MB\}$$

y su imagen el conjunto de segundas componentes de las parejas ordenadas de f_1, es decir, el conjunto

$$C = \{NA, S, B, MB\} = B$$

3.1 Función suprayectiva

Definición: Si todo elemento del codominio de una función f es imagen de al menos un elemento de su dominio, entonces f es una *función suprayectiva.*



$f : A \rightarrow B$ suprayectiva

Obsérvese que f_1 es una función suprayectiva de A en B, ya que cada elemento de B es imagen de al menos un elemento de A: NA es la imagen o valor de la función f_1 en 1 y se representa así: $f_1(1) = NA$.

También en 2, en 3, en 4 y en 5 la imagen es NA: $f_1(2) = NA$, $f_1(3) = NA$, $f_1(4) = NA$, $f_1(5) = NA$; S es el valor de f_1 en 6 y en 7: $f_1(6) = S$, $f_1(7) = S$; y MB es el valor de f en 10: $f_1(10) = MB$.

Con el objeto de observar claramente el papel que desempeña cada uno de los elementos de una función: el dominio, el codominio, la imagen del dominio de la función y la función misma, podemos imaginarla como una máquina f, según se muestra en la Fig. 3.2, que funciona de la siguiente manera: la máquina f sólo opera con elementos del conjunto A. Si se tratara de introducir en ella un elemento $z \notin A$, la máquina no lo aceptaría.

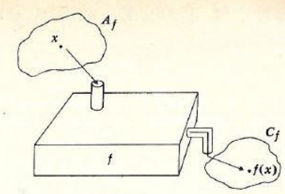


Fig. 3.2

Si tomamos un elemento $a \in A$ y se introduce en f, al salir de la máquina se habrá transformado en otro elemento $f(a)$; si introducimos al elemento $b \in A$ en f, al salir se habrá transformado en $f(b)$, el cual puede ser igual o diferente a $f(a)$. De manera que, cada elemento $x \in A$ que se introduzca en la máquina f saldrá de ella transformado en su imagen $f(x)$.

Entonces, f es la máquina y $f(x)$ es el producto que sale de la máquina cuando se ha introducido en ella el elemento x. Es importante recalcar que no debe confundirse a la función f con sus valores $f(x)$.

Ejemplo 2. Sea $f_2 : A \rightarrow \mathbf{R}$ donde

$A = \{2, -1, 0\}$

y

$$f_2(x) = 2x - 3, x \in A$$

Encuentre el conjunto f_2 de parejas ordenadas, la imagen de A y determine si la función es suprayectiva.

Solución: Como A es un conjunto finito podemos encontrar la imagen de cada elemento de A bajo f_2 para formar las parejas ordenadas.

x	$f_2(x) = 2x - 3$	$(x, f(x))$
2	$f(2) = 2(2) - 3 = 1$	$(2, 1)$
-1	$f(-1) = 2(-1) - 3 = -5$	$(-1, -5)$
0	$f(0) = 2(0) - 3 = -3$	$(0, -3)$

de donde $f_2 = \{(2, 1), (-1, -5), (0, -3)\}$ y su imagen el conjunto

$$C = \{1, -5, -3\}$$

Observemos que $C \subset \mathbf{R}$ y $C \neq \mathbf{R}$, por lo tanto, f_2 no es una función suprayectiva.

Ejercicios 3.1

Clasifique como relación o función, según corresponda, y encuentre el dominio y la imagen para cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $\{(1, 3), (2,5), (3, 9), (4, 10)\}$
2) $\{(\sqrt{2}, 1), (1, 1), (\sqrt{5}, 1), (2, 1)\}$
3) $\{(-2, 0), (5, -5), (-2, -2)\}$
4) $\{(6, -2), (-2, 6), (4, -1), (-1, 4), (0, 5), (5, 0)\}$
5) $\{(-1, 10), (-1, 0), (-1, 3)\}$
6) $\{(x, y) \mid y = \sqrt{x}, \quad x \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\}$
7) $\{(x, y) \mid y = 2^x, \quad x \in \mathbf{Z}\}$
8) $\{(x, y) \mid 4x + y = 2, \quad x \in \mathbf{R}\}$
9) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1, -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{R}\}$
10) $\{(x, y) \mid y < x, \quad x \in \mathbf{R}\}$

En los problemas enunciados a continuación encuentre el dominio, la imagen y la expresión algebraica de la función:

11) $f = \{(1, 4), (2, 8), (3, 12), (4, 16)\}$
12) $g = \{(3, 1), (6, 2), (9, 3)\}$
13) $h = \{(3, 8), (4, 10), (5, 12)\}$

14) El perímetro p de un cuadrado es 4 veces el largo l de un lado.
15) El costo c del alquiler de una máquina durante d días es de \$ 50, más \$ 10 por día.
16) Un teatro tiene 500 asientos de \$ 30 boleto. Los ingresos i están determinados por el número n de boletos vendidos para cada función.
17) f, asigna a cada número entero su semivalor absoluto.
18) g, asocia el número 4 a cada número real no negativo.
19) h, asocia a cada número entero positivo su cuadrado, y a cada número entero negativo su mismo valor.

En los ejercicios 20, 21 y 22, escriba, para cada función, el conjunto de las parejas ordenadas que la forman:

20) Asocie a los cuadrados de los enteros mayores o iguales a cero y menores que 30 su raíz cuadrada negativa.
21) Asocie a cada número entero, desde -3 hasta 6, el doble de su cuadrado.
22) Asocie a cada número entero, desde -4 hasta 2, su inverso aditivo.
23) Sea $f(x) = 3x^2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$; encuentre $f(-2)$, $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(3)$, $f(a-1)$.
24) Sea $f(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$, $x \in \mathbf{R}$; encuentre $f(2)$, $f(18)$, $f(5/2)$, $f(a)$, $f(6)/f(18)$.
25) Sea $g(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbf{R}$; encuentre $g(1)$, $g(-1)$, $g(0)$, $g(b)$, $g(b+2)$, $\{g(5) - [g(3)/g(2)]\}$
26) Sea $g(x) = 1/2\, x^2 - 4x$, $x \in \mathbf{R}$; encuentre $g(4)$, $g(|-2|)$, $g(0)$, $g(a)$, $2g(3)$, $[g(3) - g(2)] / [g(2) - g(1)]$

3.2 Gráfica de una función

Una función puede expresarse gráficamente con diagramas de Venn o en un sistema de ejes coordenados de la siguiente manera:

La gráfica de una función f es el conjunto de elementos del producto cartesiano representados en el plano, con la propiedad de que un elemento (x, y) pertenece a la gráfica si y sólo si es elemento de la función f.

Entonces,

$$G = \{(x, y) \in A \times B \mid (x, y) \in f\}$$

La gráfica en el plano de la función f_1 del ejemplo 1 se muestra en la Fig. 3.3,

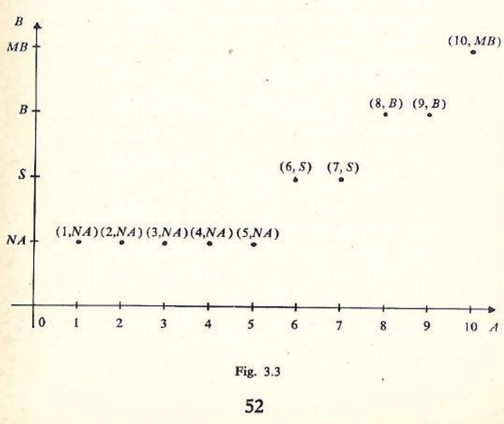


Fig. 3.3

y la de la función f_2 del ejemplo 2 aparece en la Fig. 3.4.

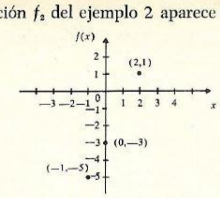


Fig. 3.4

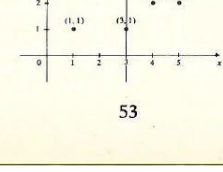
Nótese que la diferencia entre una relación y una función consiste en que la relación es un conjunto de parejas ordenadas que cumplen alguna condición y, en la función, todas las parejas tienen la primera componente diferente a las demás.

Gráficamente esta diferencia se observa como sigue: en la función todos sus puntos tienen diferente abscisa, y en la relación puede haber más de un punto con la misma primera componente; esto equivale a decir que cualquier recta paralela al eje de las ordenadas, en todo punto del dominio de la función, intersecta a su gráfica en uno y sólo un punto, mientras que la gráfica de la relación puede ser cortada en uno, dos o más puntos.

Toda función es una relación, y no toda relación es función.

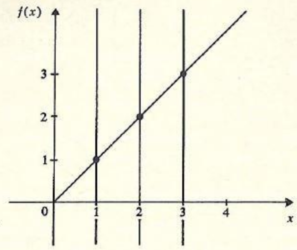
Ejemplo 3. Determine si las gráficas dadas representan una función o una relación.

a)



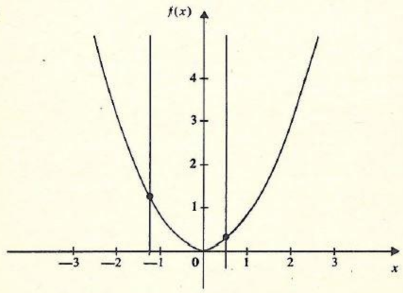
Solución: Si trazamos una recta paralela al eje y, por los puntos de abscisa 3, la línea cruza a dos puntos de la gráfica, por lo tanto la figura representa a una relación que no es función; existen dos parejas, $(3,1)$ y $(3,3)$, con el mismo elemento 3 como primera componente.

b)



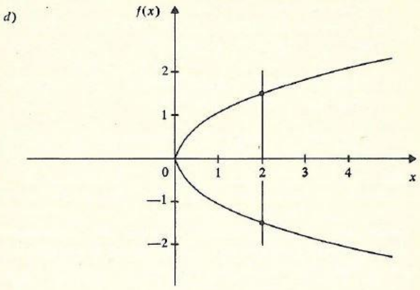
Solución: Toda recta paralela a y, que pase por algún punto del dominio de la relación, se intersecta en uno, y solamente en uno de los puntos de la gráfica, por lo tanto, la gráfica representa una función.

c)



Solución: La gráfica representa una relación que sí es función, ya que toda recta paralela al eje de las ordenadas en algún punto de su dominio intersecta a la gráfica en un punto.

d)



Solución: La gráfica no representa una función, ya que al menos hay dos parejas, las que cruza la recta paralela al eje y, en los puntos de abscisa 2, con este valor como primera componente.

3.3 Función inyectiva

Ejemplo 4. Sean dos conjuntos A y B, donde

$A = \{ x \mid x$ es estado de la República Mexicana en diciembre de 1974 $\}$

$B = \{ y \mid y$ es ciudad de la República Mexicana $\}$

Sea f_3: $A \to B$ la regla que asocia a cada estado de la República Mexicana su ciudad capital.

$A =$ { Aguascalientes, Baja California Norte, Baja California Sur, Campeche, Coahuila. . . , Veracruz, Yucatán, Zacatecas, }

$B =$ { Aguascalientes, Acapulco , . . , Cd. Juárez, . . , Hermosillo, . . , Mérida, Veracruz, Zacatecas }

y

$f_3 =$ { (Aguascalientes, Aguascalientes), (Baja California Norte, Mexicali), (Baja California Sur, La Paz), . . , (Sonora, Hermosillo). . . , (Zacatecas, Zacatecas)}, luego, f_3 es una función porque cada una de sus parejas ordenadas tiene su primer elemento diferente a las demás.

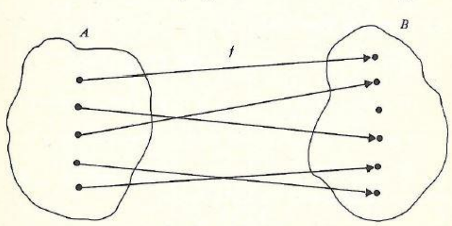
Obsérvese que al tomar en forma arbitraria dos estados diferentes en A, se obtienen, bajo f_3, dos ciudades diferentes en B, esto es, que la ciudad que es capital lo es solamente de un estado de la República Mexicana. A funciones como f_3 se les llama inyectivas.

Definición: A una función f en la que a cualquier par de elementos diferentes del dominio les corresponden imágenes diferentes, se le llama *función inyectiva.*

Es decir, $f : A \to B$ es inyectiva si para todo $a_1, a_2 \in A$, y $a_1 \neq a_2$, $f(a_1) \neq f(a_2)$; o lo que es lo mismo:

$$\text{si } f(a_1) = f(a_2) \text{ entonces } a_1 = a_2.$$

Gráficamente esta propiedad se observa en la Fig. 3.5.



$f : A \to B$ inyectiva

Fig. 3.5

y en el plano, cuando todos los puntos de la gráfica de la función tienen diferente ordenada para diferentes abscisas, (Fig. 3.6).

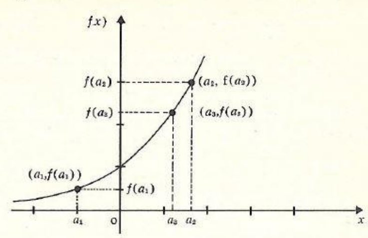


Fig. 3.6

3.4 Función creciente. Función decreciente

Se llama función real de variable real o simplemente función real a una función cuyo dominio y codominio están contenidos en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 5. Sea f_4 una función real; $f_4 : \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}$ con $f(x) = x^2$. Encuentre su imagen, su gráfica y analice la función.

Solución: El dominio de f_4 son los números reales mayores o iguales a cero y f_4 asocia a cada valor del dominio su cuadrado, entonces, ya que el cuadrado de 0 es 0 y el cuadrado de un número positivo también es positivo, la imagen de la función f_4 es el conjunto de los números reales no negativos,

$$C = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$$

por lo tanto, f_4 no es suprayectiva.

Si tomamos en forma arbitraria dos valores diferentes del dominio de f_4, a cada uno le corresponde su cuadrado que también es diferente, por ejemplo:

a_1	a_2	$f_4(a_1)$	$f_4(a_2)$
0	5	0	25
3	9	9	81
4	1	16	1 etc.

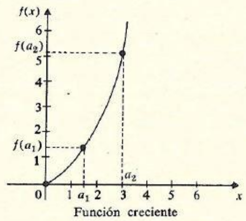
Por lo tanto, f_4 es una función inyectiva. Su gráfica aparece en la Fig. 3.7.

Recuérdese que, dados a_1 a_2, $\in$ **R**, la Ley de la Tricotomía establece que una y sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera:

a) $a_1 = a_2$; b) $a_1 < a_2$; c) $a_2 < a_1$.

Cuando elegimos dos valores diferentes cualesquiera del dominio de una función real para analizar si la función es inyectiva, la primera proposición de la Ley de la Tricotomía queda descartada, sólo podrá ocurrir b) o c). Si $a_1 < a_2$ entonces, en la recta numérica a_1 está colocado a la izquierda de a_2; si $a_2 < a_1$ entonces, a_2 se encuentra a la izquierda de a_1.

Para la función f_4 del ejemplo que estamos analizando, cuando los valores que se eligen del dominio son tales que $a_1 < a_2$, en la Fig. 3.7 se observa que sus imágenes correspondientes también guardan esta relación, es decir: $f_4(a_1) < f_4(a_2)$; al ocurrir esto se dice que *la función es creciente.*



Función creciente

$a_1 < a_2$ y $f(a_1) < f(a_2)$

Fig. 3.7

Definición: Una función real f es creciente en un intervalo si y sólo si dados a_1 y a_2 en el intervalo y $a_1 < a_2$, $f(a_1) < f(a_2)$.

Ejemplo 6. Sea $f_5 : A \to \mathbf{R}$, donde

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leq x \leq 8\} \text{ y } f_5(x) = 8/x.$$

Encuentre f_5, su imagen, su gráfica y analícela.

Solución:

$$f_5 = \{(x, f(x)) \mid f(x) = 8/x,\ 2 \leq x \leq 8,\ x \in \mathbf{R}\}$$

Aumentando en forma continua a x desde dos hasta 8, como el numerador de $f(x)$ es constante, el valor de la función decrece en forma continua desde 4 hasta 1 como se observa en la siguiente tabla:

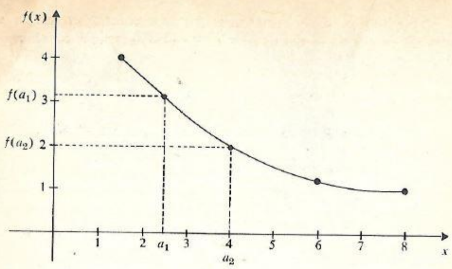
x	$f(x) = 8/x$	$(x, f(x))$
2	$8/2 = 4$	$(2, 4)$
4	$8/4 = 2$	$(4, 2)$
6	$8/6 = 4/3$	$(6, 4/3)$
8	$8/8 = 1$	$(8, 1)$

Entonces, la imagen de f_5 es el conjunto de los números reales comprendidos desde 1 hasta 4, esto es:

$$C = \{y \in \mathbf{R} \mid 1 \leq y \leq 4\}$$

por lo tanto, f_5 no es suprayectiva.

Para todo a_1, $a_2 \in [2, 8]$, $a_1 \neq a_2$, se cumple que $f_5(a_1) \neq f_5(a_2)$, por lo tanto, la función es inyectiva. Su gráfica aparece en la Fig. 3.8.



Función decreciente

$a_1 < a_2$ y $f(a_1) > f(a_2)$

Fig. 3.8

Observemos que si tomamos 2 elementos arbitrarios a_1, a_2, del dominio y $a_1 < a_2$, sus imágenes correspondientes son tales que $f_5(a_2) < f_5(a_1)$, por lo tanto, la función no es creciente, ya que la imagen del elemento a_1 del dominio es mayor que la imagen que le corresponde al elemento a_2, siendo $a_1 < a_2$. En este caso *la función es decreciente.*

Definición: Una función real f es decreciente en un intervalo si y sólo si dados a_1 y a_2 en el intervalo y $a_1 < a_2$, $f(a_2) < f(a_1)$.

3.5 Función biyectiva

Ejemplo 7. Considérese la función f_3 del ejemplo 4, con $f_3 : A \to B_1$, donde B_1 es el conjunto de las ciudades capitales de estado en la República Mexicana, o sea:

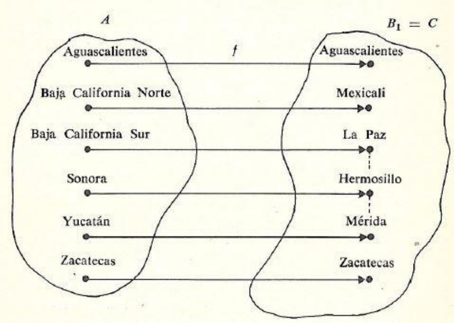
$B_1 = \{$Aguascalientes, Mexicali, La Paz, . . . Hermosillo, . . . , Jalapa, . . . , Mérida, Zacatecas$\}$

Encuentre f_3, su imagen y determine si es suprayectiva e inyectiva.

Solución: El conjunto de parejas ordenadas de f_3 es el mismo que en el ejemplo 4; como la regla de correspondencia y el dominio de la función no se han modificado, la imagen del dominio tampoco cambia, entonces

$f_3 = \{$(Aguascalientes, Aguascalientes),
(Baja California Norte, Mexicali),
(Baja California Sur, La Paz), . . . ,
(Hermosillo, Sonora), . . . , (Mérida, Yucatán),
(Zacatecas, Zacatecas)$\}$

sólo que ahora la imagen del dominio de la función es el mismo conjunto B_1 codominio de f_3, por lo tanto, la función es suprayectiva. Tomando dos elementos diferentes cualesquiera en A, sus imágenes nuevamente son dos ciudades diferentes y la función es inyectiva. La gráfica de f_3 aparece en la Fig. 3.9.



$f_3 : A \to B$

Fig. 3.9

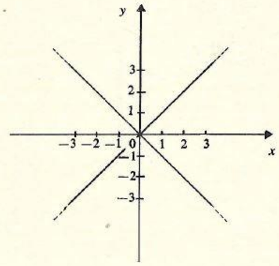
Definición: Una función que es suprayectiva e inyectiva se llama *función biyectiva.*

f_3 es una función biyectiva porque es suprayectiva e inyectiva; todo elemento del codominio de f_3 es imagen de sólo un elemento del dominio de la función.

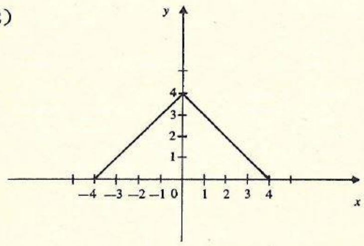
Ejercicios 3.2

Analice si las siguientes gráficas representan una función o una relación y dé sus dominios e imágenes.

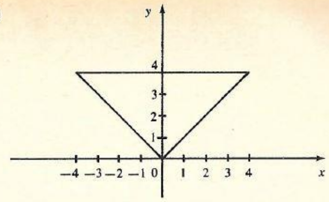
1)



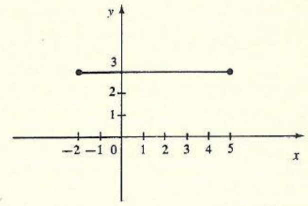
2)



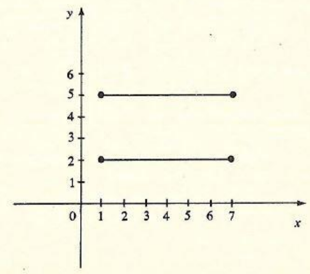
3)



4)



5)



Determine si las siguientes funciones son suprayectivas inyectivas, biyectivas, crecientes o decrecientes y represéntelas gráficamente.

6) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = 2x - 6$

7) $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $g(x) = |x|$

8) $h : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $h(x) = 2$

9) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, $f(x) = x/3$

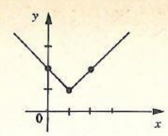
10) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = -x + 9$

Examen para la sección 3

¿Falso o verdadero?

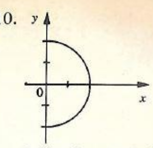
1. La relación $h : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}$, que asocia a cada entero positivo su raíz cuadrada negativa, es una relación que es función.
2. Si A es el conjunto de los números primos y B es el conjunto de los números naturales mayores que 3, entonces la relación $h : A \to B$, que asocia a cada número primo su cuadrado, es una relación que es función.
3. El conjunto $\{(3/5, 1), (9/8, 1/3), (3/5, 2), (1/4, -1)\}$ representa a una función.
4. El conjunto $\{(-1,3), (3,-1), (2,-4), (-4,2)\}$ representa a una relación que no es función.
5. El conjunto $\{x \in \mathbf{R}^+ \;\; y^2 = x\}$ representa a una relación que no es función.
6. El conjunto $\{x \in \mathbf{R} \mid 4x + y - 1 = 0\}$ representa a una relación que no es función.
7. El dominio de la función definida por $f(x) = 1/x$ es el conjunto $\mathbf{R}$ de los números reales.
8. La imagen de la función $f(x) = -x/2 + 1$, $x \in \mathbf{R}$ es el conjunto $\mathbf{R}^+$ de los números reales positivos.

9.



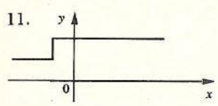
Gráfica de una función.

10.



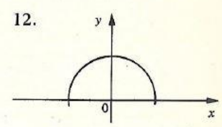
Gráfica de una relación que no es función.

11.



Gráfica de una función.

12.



Gráfica de una función.

13. La función $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $f(x) = x + 3$, es una función biyectiva.
14. La función $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, con $h(x) = \sqrt{x}$, es una función creciente en su dominio.
15. La función $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, con $g(x) = x^2$, es una función decreciente en su dominio.
16. La función g, que asocia a cada entero positivo el triple de su cuadrado o a cada entero no negativo la semisuma de su valor aumentado en 2, se expresa como

$$g(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } x \in \mathbf{Z}^+ \\ (x+2)/2, & \text{si } x \in \mathbf{Z}^- \cup \{0\} \end{cases}$$

17. El dominio de la función f definida por $f(x) = \frac{\sqrt[2]{x}}{x}$ es el conjunto:

a) $\mathbf{R}$
b) $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
c) $\mathbf{R}^+$
d) $\mathbf{R}^-$

18. La imagen de la función g definida por $g(x) = |x| - x$, $x \in \mathbf{R}$ es el conjunto:

a) $\mathbf{R}$
b) $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
c) $\mathbf{R}^+$
d) $\mathbf{R}^-$

19. La función $h : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, con $h(x) = x - |x|$ es igual a la función $f : \mathbf{R}^- \to \mathbf{R}$ con

a) $f(x) = 2x$
b) $f(x) = 2|x|$
c) $f(x) = -2x$
d) $f(x) = 0$

20. La función $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, con $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ es una función:

a) Suprayectiva
b) Inyectiva
c) Creciente
d) Constante

21. La función $f : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}$ con $f(x) = x/(x+1)$ es una función:

a) Creciente
b) Decreciente
c) Suprayectiva
d) Biyectiva

22. La función h que asocia a cada número real no negativo la raíz cuadrada positiva del cubo de su valor o a cada real negativo la raíz cúbica del cuadrado de su valor, se expresa como:

a) $h(x) = \begin{cases} (\sqrt{x})^3 & \text{si } x < 0 \\ (\sqrt[3]{x})^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (\sqrt{x})^3 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^3} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

23. Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 4, & x \geq -2 \\ 3x^2 - 7, & x < -2 \end{cases}$

entonces, $f(-3)$ es igual a:

a) 20
b) 1
c) -34
d) $\sqrt{7}$

24. Si $g(x) = -5\,(x^2 - x)/2$, $x \in \mathbf{R}$, entonces $g(g(1))$ es igual a:

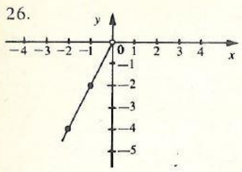
a) $-5/2$
b) 0
c) No está definida.
d) $5/2$

25. Si $f(x) = x/3 + 2$, $x \in \mathbf{R}$, entonces $f(3) - [2f(6)/f(-12)]$ es igual a:

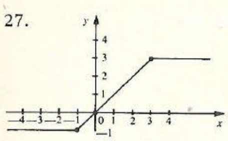
a) 7
b) -7
c) -1
d) No está definida.

Instrucciones: Relacione cada gráfica de la columna de la izquierda con la función de la columna de la derecha que le corresponda:

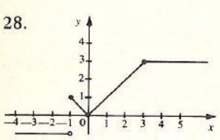
26.



27.



28.



a) f: $[-5, 5] \to \mathbf{R}$,
$f(x) = \begin{cases} |x-5|, \\ 0 \leq x \leq 5 \\ |x+5|, \\ -5 \leq x < 0 \end{cases}$

b) g: $\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}$,
$g(x) = x - |x|$

c) h: $[-3, 3] \to \mathbf{R}$,
$h(x) = -\sqrt{9 - x^2}$

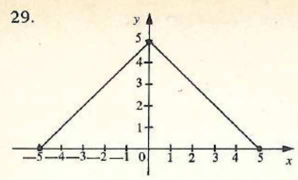
d) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

e) g: $[-3, 3] \to \mathbf{R}$
$g(x) = -\sqrt{x}$

f) h: $[-5, 5] \to \mathbf{R}$
$h(x) = |x|$

g) g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ |x| & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

29.



30.

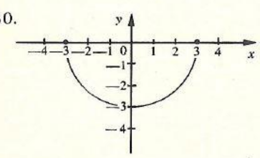
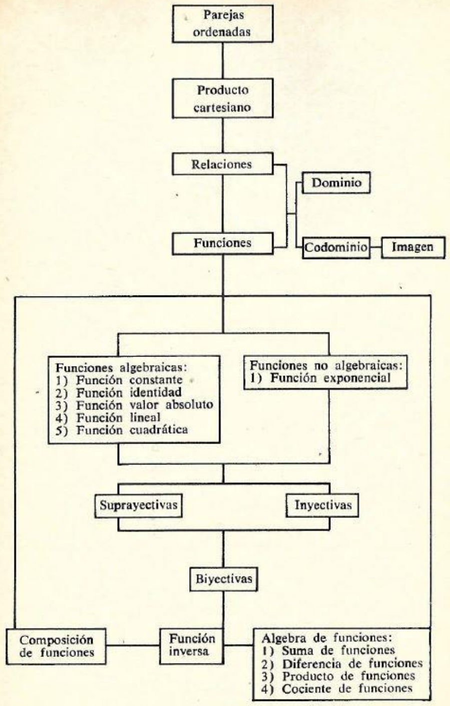


DIAGRAMA CONCEPTUAL



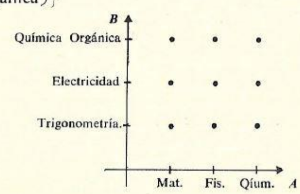
SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Ejercicios 1.1

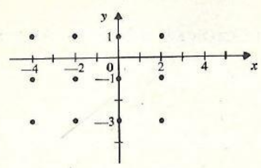
1) (1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (3, 8), (3, 10), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (5, 8), (5, 10)
2) (2, 400), (5, 1 000), (3, 600), (0, 0)
3) (1, 810), (2, 720), (3, 630), (4, 540), (5, 450), (6, 360), (7, 270), (8, 180), (9, 90), (10, 0).
4) (1, 1), (2, 0), (3, 1), (4, 0), (5, 1), (6, 0).

Ejercicios 1.2

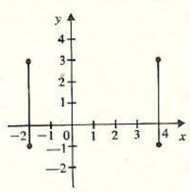
1) (1, 4.9), (2, 19.6), (3, 44.1), (4, 78.4), (5, 122.5)
2) (3, 3), (4, 6), (5, 10), (6, 15), (7, 21), (8, 28).
3) $A \times B = \{$(matemáticas, trigonometría), (matemáticas, electricidad), (matemáticas, química orgánica), (física, trigonometría), (física, electricidad), (física, química orgánica), (química, trigonometría), (química, electricidad), (química, química orgánica)$\}$



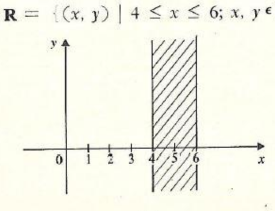
4) $S \times T = \{(x, x^2), (x, z^2), (x, y^2), (y, x^2), (y, z^2), (y, y^2), (z, x^2), (z, z^2), (z, y^2)\}$
5) $A \times B = \{(-4, -3), (-4, -1), (-4, 1), (-2, -3), (-2, -1), (-2, 1), (0, -3), (0, -1), (0, 1), (2, -3), (2, -1), (2, 1)\}$



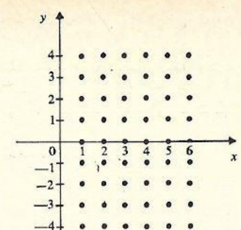
6) $C \times C = \{(0, 0), (0, 1/2), (0, 1), (1/2, 0), (1/2, 1/2), (1/2, 1), (1, 0), (1, 1/2), (1, 1)\}$
7) $D \times E = \{(-2, y) \mid -1 \leq y \leq 3, y \in \mathbf{R}\} \cup \{(4, y) \mid -1 \leq y \leq 3, y \in \mathbf{R}\}$



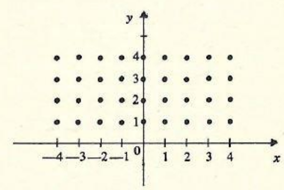
8) $A \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid 4 \leq x \leq 6; x, y \in \mathbf{R}\}$



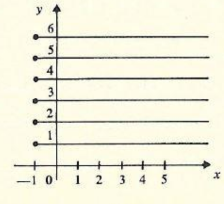
9) $\mathbf{N} \times \mathbf{Z} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Z}\}$



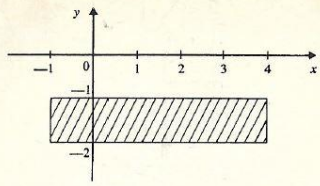
10) $\mathbf{Z} \times \mathbf{N} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{N}\}$



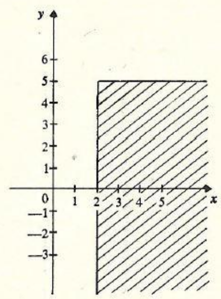
11) $P \times \mathbf{N} = \{(x, y) \mid x \geq -1, y \in \mathbf{N}\}$



12) $B \times T = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 4,\ -2 \leq y \leq -1,\ x, y \in \mathbf{R}\}$



13) $A \times C = \{(x, y) \mid x \geq 2,\ y \leq 5,\ x, y \in \mathbf{R}\}$



Ejercicios 1.3

2) a) (x, y) está en el primer cuadrante si y sólo si $x > 0,\ y > 0$
   b) (x, y) está en el segundo cuadrante si y sólo si $x < 0,\ y > 0$
   c) $x < 0,\ y < 0$
   d) $x > 0,\ y < 0$

3) a) Su abscisa vale 0
   b) Su ordenada vale 0
   c) $(0, 0)$
4) a) $(-2, 5)$
   b) $(2, 6)$
   c) $(3, 1)$
   d) $(-3, 0)$
   e) $(-3, 1)$
5) $P_1 = (0, 0),\ P_2 = (3, 0),\ P_3 = (0, 3),\ P_4 = (3, 3)$

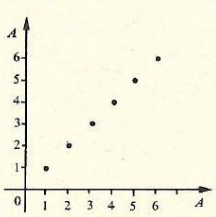
Ejercicios 2.1

1) a) {(Ricardo Trejo G., José Trejo), (Luisa Trejo Gil, José Trejo), (Arturo Trejo G., José Trejo), (Ricardo Trejo Gil, Sra. Gil de Trejo), (Luisa Trejo Gil, Sra. Gil de Trejo), (Arturo Trejo Gil, Sra. Gil de Trejo)}
   b) {(Luisa Trejo Gil, José Trejo), (Luisa Trejo Gil, Sra. Gil de Trejo)}
   c) {(Sra. Gil de Trejo, Ricardo Trejo Gil), (Sra. Gil de Trejo, Luisa Trejo Gil), (Sra. Gil de Trejo, Arturo Trejo Gil)}
   d) {(Luisa Trejo Gil, Ricardo Trejo Gil), (Luisa Trejo Gil, Arturo Trejo Gil)}
   e) {(José Trejo, Ricardo Trejo Gil), (José Trejo, Luisa Trejo Gil), (José Trejo, Arturo Trejo Gil)}
   f) {(Ricardo Trejo Gil, Luisa Trejo Gil), (Ricardo Trejo Gil, Arturo Trejo Gil), (Luisa Trejo Gil, Ricardo Trejo Gil), (Luisa Trejo Gil, Arturo Trejo Gil), (Arturo Trejo Gil, Ricardo Trejo Gil), (Arturo Trejo Gil, Luisa Trejo Gil)}

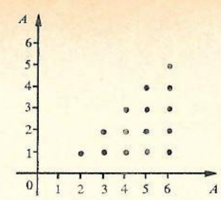
2) {(Cristóbal Colón, Benito Juárez), (Benito Juárez, P. Elías Calles), (Cristóbal Colón, P. Elías Calles)}
3) "Presidente notable, ya fallecido, de un país de América".
4) a) $R = \{(1, 1), (2, 3/2), (3, 1/2)\}$
   dominio $= \{1, 2, 3\}$; imagen $= \{1, 3/2, 1/2\}$

   b) $R =$ {(Luis, 1.81 m), (Rosa, 1.40 m), (Lucía, 1.70 m), (José, 1.25 m)}
   dominio = {Luis, Rosa, Lucía, José}
   imagen = {1.25 m, 1.40 m, 1.70 m, 181 m}

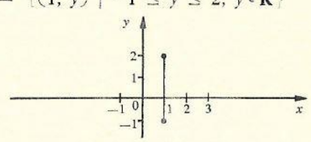
5) R_1: $3x$, dominio $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   imagen $= \{3, 6, 9, 12, 15\}$
6) R_2: $x/2$, dominio $= \{4, 8, 12, 16\}$
   imagen $= \{2, 4, 6, 8\}$
7) R_3: $x - 1$, dominio $= \{4, 6, 8\}$
   imagen $= \{3, 5, 7\}$
8) R_4: x^2, dominio $= \{2, -2, 3, -3\}$
   imagen $= \{4, 9\}$
9) R_5: $|x|$, dominio $= \{1, 2, -1, -2\}$
   imagen $= \{1, 2\}$
10) $R = \{(0, 8), (8, 0), (4, 4), (6, 2), (2, 6), (1, 7), (7, 1)\}$
11) $R = \{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3)\}$
12) $R = \{(-4, 8), (-3, 6), (-2, 4), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$
13) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$



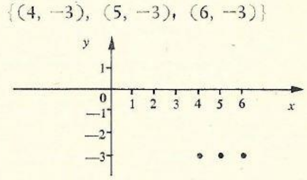
14) $R = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1), (4, 3), (4, 2), (4, 1), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (5, 1), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2), (6, 1)\}$



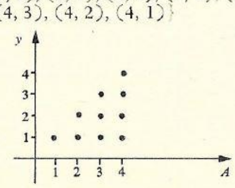
15) No es posible encontrar R listando sus parejas:
   $R = \{(1, y) \mid -1 \leq y \leq 2,\ y \in \mathbf{R}\}$



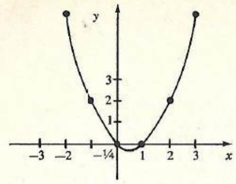
16) $R = \{(4, -3), (5, -3), (6, -3)\}$



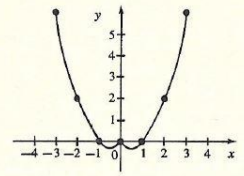
17) $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 1), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (4, 4), (4, 3), (4, 2), (4, 1)\}$



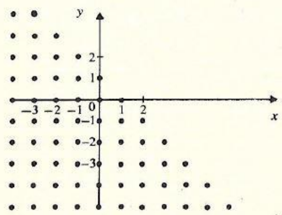
18) Imagen $= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -1/4\}$



19) Imagen $= \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq -1/4\}$



20) Imagen $= \mathbf{Z}$



Ejercicios 3.1

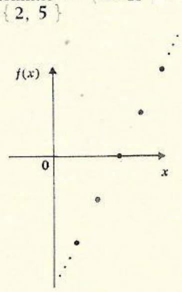
1) Función, dominio $= \{1, 2, 3, 4,\}$
imagen $= \{3, 5, 9, 10\}$
2) Función, dominio $= \{\sqrt{2}, 1, \sqrt{5}, 2\}$
imagen $= \{1\}$
3) Relación, dominio $= \{-2, 5\}$
imagen $= \{0, -5, -2\}$
4) Función, dominio $= \{6, -2, 4, -1, 0, 5\}$
imagen $= \{-2, 6, -1, 4, 5, 0\}$
5) Relación, dominio $= \{-1\}$, imagen $= \{10, 0, 3\}$
6) Función, dominio $= \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$,
imagen $= \{\sqrt{x} \ \ x \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\} \subset \mathbf{R}$
7) Función, dominio $= \mathbf{Z}$, imagen $= \{2^x \ \ x \in \mathbf{Z}\} \subset Q^+$
8) Función, dominio $= \mathbf{R}$, imagen $= \mathbf{R}$
9) Relación, dominio $= \{x \in \mathbf{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
imagen $= \{y \in \mathbf{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
10) Relación, dominio $= \mathbf{R}$, imagen $= \mathbf{R}$
11) $f(x) = 4x$, $x \in A$; dominio $= A = \{1, 2, 3, 4\}$
imagen $= \{4, 8, 12, 16\}$
12) $g(x) = x/3$, $x \in A$: dominio $= A = \{3, 6, 9\}$
imagen $= \{1, 2, 3\}$
13) $h(x) = 2x + 2$, $x \in A$; dominio $= A = \{3, 4, 5\}$
imagen $= \{8, 10, 12\}$
14) $p = 4l,\ l \geq 0,\ p \geq 0$
15) $c = 50 + 10d,\ d \in \mathbf{N},\ c \geq 50,\ c \in \mathbf{N}$
16) $i = 30n,\ 0 \leq n \leq 500,\ n \in \mathbf{Z}$,
$0 \leq i \leq 15\,000,\ i \in \mathbf{Z}$
17) $f(x) = |x|/2,\ x \in \mathbf{Z},\ f(x) \geq 0,\ f(x) \in \mathbf{Z}$
18) $g(x) = 4, \quad x \in R^+ \cup \{0\}$, imagen $= \{4\}$
19) $h(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x > 0,\ x \in \mathbf{Z};\ \text{imagen} = \mathbf{Z}^+ \\ x \text{ si } x < 0,\ x \in \mathbf{Z};\ \text{imagen} = \mathbf{Z} \end{cases}$
20) $f = \{(1, -1), (4, -2), (9, -3), (16-4), (25, -5)\}$
21) $f = \{(-3, 18), (-2, 8), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 8), (3, 18), (4, 32), (5, 50), (6, 72)\}$
22) $f = \{(-4, 4), (-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2)\}$

23) $f(-2) = 13,\ f(0) = 1,\ f(\sqrt{2}) = 7,\ f(3) = 28$,
$f(a-1) = 3a^2 - 6a + 4$
24) $f(2) = 0,\ f(18) = 4,\ f(5/2) = \sqrt{1/2}$,
$f(a) = \sqrt{a-2},\ f(6)/f(18) = 1/2$
25) $g(1) = 0, g(-1) = 2, g(0) = 0, g(b) = b(b-1)$,
$g(b+2) = b^2 + 3b + 4, [g(5) - (g(3)/g(2))] = 17$
26) $g(4) = -8,\ g(|-2|) = -6,\ g(0) = 0$,
$g(a) = a(a-8)/2,\ 2g(3) = -15$,
$[g(3)-g(2)]/[g(2)-g(1)] = 3/5$

Ejercicios 3.2

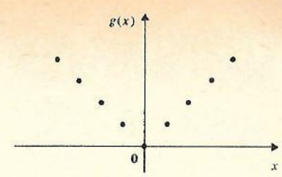
1) Relación, dominio $= \mathbf{R}$, imagen $= \mathbf{R}$
2) Función, dominio $= \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
imagen $= \{y \in \mathbf{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$
3) Relación, dominio $= \{x \in \mathbf{R} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
imagen $= \{y \in \mathbf{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$
4) Función, dominio $= \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$
imagen $= \{3\}$
5) Relación, dominio $= \{x \in \mathbf{R} \mid 1 \leq x \leq 7\}$
imagen $= \{2, 5\}$

6)



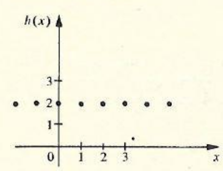
$f(x)$ es suprayectiva, inyectiva, biyectiva y creciente.

7)



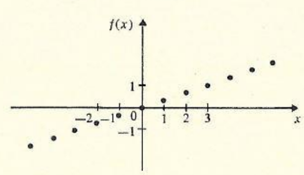
$g(x)$ es suprayectiva, no es inyectiva, no es biyectiva, creciente en $\mathbf{Z}^+$, decreciente en $\mathbf{Z}^-$.

8)



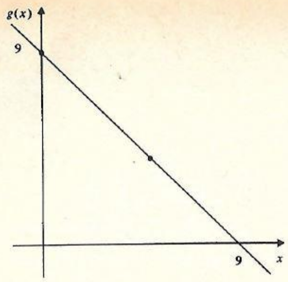
$h(x)$ no es suprayectiva, no es inyectiva, no es biyectiva, no es creciente, no es decreciente.

9)



$f(x)$ es suprayectiva, es inyectiva, es biyectiva, es creciente.

10)



$g(x)$ es suprayectiva, es inyectiva, es biyectiva, es decreciente.

Respuestas al examen (sección 1)

1. a
2. b
3. d
4. b
5. a
6. c
7. d
8. d
9. c
10. a
11. f
12. a
13. e
14. g
15. d

Respuestas al examen (sección 2)

1. d
2. c
3. d
4. c
5. b
6. d
7. a
8. b
9. a
10. d
11. f
12. b
13. e
14. a
15. d

Respuestas al examen (sección 3)

1.	V	16.	V
2.	V	17.	c
3.	F	18.	b
4.	F	19.	d
5.	V	20.	b
6.	F	21.	a
7.	F	22.	d
8.	F	23.	a
9.	V	24.	b
10.	V	25.	a
11.	F	26.	b
12.	V	27.	d
13.	V	28.	g
14.	V	29.	a
15.	F	30.	c